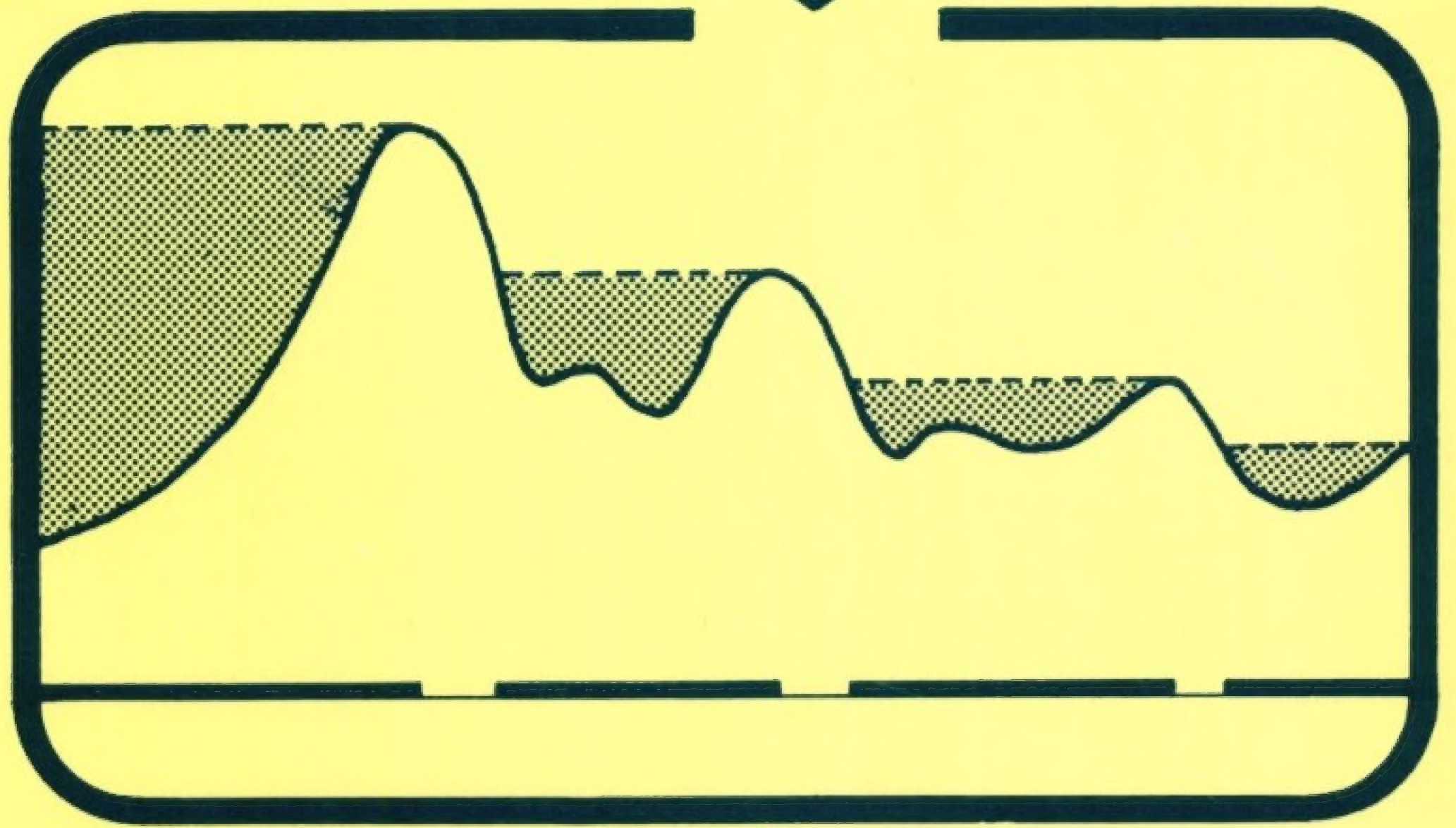


المدخل إلى الدوال الحقيقية



تأليف
رالف بواس

ترجمة

الدكتور عبدالله بن محمد الراشد الدكتور صالح بن عبدالرحمن القويز

١٤٠٧ هـ

الناشر: عمادة شؤون المكتبات - جامعة الملك سعود - الرياض

١٩٨٧ م





المدخل إلى الدوال الحقيقية

تأليف

رالف بواس

أستاذ الرياضيات - بجامعة نورث وسترن

ترجمة

الدكتور صالح عبدالرحمن القويز

قسم العلوم الرياضية - كلية العلوم

جامعة البترول والمعادن

الظهران - المملكة العربية السعودية

الدكتور عبدالله محمد الراشد

قسم الرياضيات - كلية العلوم

جامعة الملك سعود

الرياض - المملكة العربية السعودية

الناشر: عمادة شؤون المكتبات - جامعة الملك سعود

ص.ب. ٢٢٤٨٠ - الرياض - ١١٤٩٥ - المملكة العربية السعودية

© الترجمة العربية ١٩٨٧م جامعة الملك سعود

جميع حقوق الطبع محفوظة. غير مسموح بطبع أي جزء من أجزاء هذا الكتاب، أو تخزينه في أي نظام لحزن المعلومات واسترجاعها، أو نقله على أية هيئة أو بآية وسيلة سواء كانت إلكترونية أو شرائط ممغنطة أو ميكانيكية، أو استنساخاً، أو تسجيلاً، أو غيرها إلا بإذن كتابي من صاحب حق الطبع.

الطبعة الأولى ١٤٠٧هـ (١٩٨٧م).

(عن الطبعة الإنجليزية الثانية الصادرة في عام ١٩٧٢م)

٥١٧

ب ر م بواس، رالف

المدخل إلى الدوال الحقيقية / تأليف رالف بواس

ترجمة عبدالله محمد الراشد، صالح عبدالرحمن القوير

١ - التفاضل والتكامل ٢ - الرياضيات

١ - الراشد، عبدالله محمد ب - القوير، صالح عبدالرحمن

ج - العنوان

©This is an authorized Arabic translation of the book entitled:

– A Primer of Real Functions –
“Second edition 1972”

By Ralph Boas

Published by:
“The Mathematical Association of America”

مطابع جامعة الملك سعود - ١٤٠٧هـ



صف الحروف من قبل شركة بيكاسه انتركونتيننتال، هولندا

مقدمة الترجمة

انطلاقاً من إيماننا العميق بوجوب إثراء المكتبة العربية، خصوصاً قسمها العلمي، بكل ما هو مفيد، فلقد قمنا بترجمة هذا الكتاب المتعلق بالبنية الأساسية في الدوال الحقيقية راجين أن نكون قد وفقنا ولو بعض الشيء، لما نصبوا إليه.

وتجدر الإشارة إلى أنه من مميزات هذا الكتاب، صيغته الوصفية السلسة التي حاولنا جهداً إبقائها أثناء الترجمة. كذلك لقد تميز عن غيره من الكتب التي في مستواه بخروجه عن الأسلوب المعتاد في عرض المادة حيث حاول المؤلف إعطاء أغلب المفاهيم المعروضة تصوراً هندسياً مما سهل مهمة القارئ بالإضافة إلى إعطائه بعض التطبيقات المناسبة، كلما سنحت الفرصة، مما أضفى على الكتاب طابعاً وتعداً مميزاً.

ربيع أول ١٤٠٤ هـ

المترجمان

مقدمة المؤلف

١ - إلى المبتدئ: في هذا الكتيب قدمت بعض المفاهيم والطرق المتعلقة بالمتغيرات الحقيقية، واستخدمنا هذه المفاهيم في الحصول على بعض النتائج الشيقة. لم يكن الهدف إعطاء كل ما هو معروف عن هذا الموضوع وبأعم صورة ممكنة. الهدف هو التعمق المعقول في بعض المواضيع بأقل قدر ممكن من المصطلحات الخاصة. آمل أن أكون قد نجحت في المحافظة على جاذبية الموضوع التي كانت مرافقة له في أيامه الأولى وفقدناها إلى حد كبير الآن. أرجو أن يساعد هذا الكتاب القارئ على مواصلة القراءة في أمهات الكتب المتوفرة بشكل جيد.

لا يحتاج المرء لقراءة هذا الكتاب على أكثر من مبادئ حساب التفاضل والتكامل. على العموم، قدمت المفاهيم بصورة مفصلة وبعمق تدريجي ومن يجد صعوبة في متابعتها بإمكانه الانتقال إلى الجزء التالي.

بما أن هذا ليس له صبغة الكتب المقررة وإنما هو على شاكلة محاضرات عامة فلم أحاول على الدوام المحافظة على التوازن بين البراهين المفصلة والمناقشة العامة، أو على الترتيب المنطقي للمادة المعروضة.

جميع العبارات مثل «من الواضح»، «من السهل» وخلافها تعني أنه يفترض أن تكون الجملة المعنية جلية وبإمكان القارئ أن يبرهن صحتها ونحن ندعو لذلك. ومن جهة أخرى، فالعبارات «من الممكن إثبات...» تعني إما صعوبة البرهان أو أنه

يعتمد على مفاهيم لم نتطرق لها هنا . وبالتالي فمن المستحسن ألا يحاول القارئ إعطاء البرهان بنفسه .

عند كتابة التعاريف استخدمت «إذا» حيث من المفروض استعمال «إذا وإذا فقط» . على سبيل المثال إذا كانت المجموعة محدودة من أسفل ومن أعلى فإنها تسمى محدودة . يجب أن يفهم هذا التعريف على أنه يتضمن العبارة الإضافية «وإذا لم تكن محدودة من أعلى ومن أسفل فإنها لا تسمى محدودة» .

يحتوى الكتاب على العديد من التمارين بعضها لتوضيح المادة والبعض الآخر جزء أساسي من الكتاب . التمرين الذى يرد ذكره كمنطوق لفرضية يجب تفسيره على أنه طلب لإثباتها . حلول جميع التمارين معطاة في نهاية الكتاب .

المقاطع المكتوبة بخط صغير تعني إما مواد إضافية أو أسئلة صعبة .
أعتذر مقدماً عن أى خطأ يلاحظه القارئ النبیه . لم أقصد أياً من هذه الأخطاء ولكن العثور عليها وتصحيحها يمثل تمريناً جيداً للقارئ .

٢ - إلى المتخصص: الكتاب غير مقصود للمتخصصين على الإطلاق ، حيث إن هذه الجملة ستؤخذ كدعوة لقراءته ، فسوف أوضح ما حاولت أن أعمله وما لم أحاول . لقد حاولت إعطاء القارئ الذى ليس لديه خلفية مسبقة عن الموضوع بعض النتائج التى أراها شيقة . لتحقيق هذا عرضت المادة الضرورية لتقديم هذه النتائج بالإضافة إلى بعض المواد المناسبة وغير الصعبة ، بما أن الكتاب غير شامل لم أحاول تقديم أى مفهوم أو أى رمز مهما كان مهماً أو مناسباً إذا لم تدع الحاجة إليه . لقد حذف موضوع التكامل على مفضض لكثرة ما يحتاجه من التفاصيل قبل التمكن من الوصول إلى النتائج المرغوبة .

بما أن الكتاب ليس له صبغة الكتاب المقرر لم يكتب بالطريقة المعتادة بالإضافة إلى أن الأسلوب مطول وقد استعملنا بديهية الاختيار (Axiom of choice) عدة مرات بدون ذكرها حيث إن هذا ليس مكاناً لمناقشة الأسئلة الفلسفية ، وعلى كل حال ففي ضوء نتائج جودل (Godel) فإن افتراض بديهية الاختيار لن يسبب أى إشكال أكثر مما سببته . ومن جهة أخرى وحسب عمل كوهين الحديث ، فبافتراض بديهية الاختيار بدلاً من نقيضها فإننا نختار نوعاً من الرياضيات بدلاً من

النوع الآخر، مثلاً رياضيات زرميلو بدلاً من خلافها. من هذا الاتجاه لاداعي لاجتناب بديهية الاختيار متى كان من الطبيعي استعمالها حتى في الحالات التي يعرف إمكانية تجنبها.

٣ - يعرب المؤلف عن شكره الجزيل لكل من ساهم في مراجعة وتصحيح هذا الكتاب.

رالف بواس

المحتويات

الفصل الأول: المجموعات

الصفحة

١	المجموعات	-	١
٤	مجموعات الأعداد الحقيقية	-	٢
٧	المجموعات القابلة وغير القابلة للعد	-	٣
١٨	الفضاءات المترية	-	٤
٢٢	المجموعات المفتوحة والمغلقة	-	٥
٣٣	المجموعات الكثيفة والمخلخلة	-	٦
٣٩	التراص	-	٧
٤٥	التقارب والكمال	-	٨
٥٣	المجموعات المتداخلة ونظرية بير (Baire)	-	٩
٥٧	بعض التطبيقات على نظرية بير (Baire)	-	١٠
٦٢	المجموعات التي مقياسها صفر	-	١١

الفصل الثاني : الدوال

الصفحة

٦٥	١٢ - الدوال
٦٩	١٣ - الدوال المتصلة
٧٤	١٤ - خواص الدوال المتصلة
٨٤	١٥ - النهايات العظمى والصغرى
٨٧	١٦ - متتاليات من الدوال
٩٠	١٧ - التقارب المنتظم
١٠٠	١٨ - النهايات النقطية لدوال مستمرة
١٠٣	١٩ - تقريب الدوال المستمرة
١٠٨	٢٠ - الدوال الخطية
١١٣	٢١ - التفاضلات
١٢٧	٢٢ - الدوال المطردة
١٤٠	٢٣ - الدوال المحدبة
١٤٧	٢٤ - الدوال القابلة للتفاضل من جميع الرتب
١٥٥	الحواشي
١٦٩	حلول التمارين

الفصل الأول

المجموعات

١ - المجموعات

لكي نتمكن من قراءة أى شيء حول هذا الموضوع ، يجب علينا أن نتعلم لغة المجموعات . سنحاول جعل عدد المصطلحات العلمية أقل مايمكن ولكن هناك حداً أدنى من الضروري تعلمه . معظم هذه المصطلحات كلمات عادية أعطيت معاني خاصة ، هذه الطريقة لها محاسن ومساويء ، وعلى كل حال علينا أن نقبل بها لأننا لانستطيع الآن تغيير اللغة بكاملها . معظم المصطلحات مستمدة من نظرية المجموعات وهذا موضوع لايهمنا في حد ذاته . في الحقيقة ، نظرية المجموعات فرع مستقل من الرياضيات . في هذا الفرع نجد المفاهيم الأساسية غير المعرفة والخاضعة لمسلمات عديدة ، أحد هذه المفاهيم غير المعرفة مفهوم «المجموعات» نفسه .

من وجهة النظر البديهية ، نستطيع أن نتصور المجموعة على أنها مجموعة أشياء ، تسمى عناصرها ، أو أعضاؤها أو نقاطها . نقول إن المجموعة تحوي عناصرها أو أن العناصر تنتمي إلى المجموعة ، أو ببساطة أنها من المجموعة . الاستعمال العادي لمفهوم المجموعة كما في «مجموعة من الأطباق» أو «مجموعة أعمال بورباكي» (Bourbaki) قريب مما يجب أن نعرفه عن مفهوم المجموعة ، إلا أن الجملة الثانية قد توحي بشيء من ترتيب العناصر وهذا لا علاقة له بالمفهوم الرياضي للمجموعة . نستطيع أن نكون مجموعات من نقاط هندسية عادية ، أو من دوال أو حتى من مجموعات أخرى . سوف نستخدم الكلمات مثل فئة وتجمع كمترادفات لكلمة مجموعة ، فمثلاً نقول فئة من

تجمعات من المجموعات بدلاً من مجموعة من مجموعات من مجموعات .
 إذا كانت E مجموعة، فإن H تسمى مجموعة جزئية من E إذا كان كل عنصر
 من H عنصراً من E أيضاً. فمثلاً، إذا كانت E المجموعة التي عناصرها الأعداد
 1, 2, 3 فإنه يوجد ثمان مجموعات جزئية من E . ثلاث منها تحوي أحد العناصر،
 ثلاث مجموعات تحوي أى عنصرين، مجموعة E نفسها (المجموعة الجزئية قد لا تكون
 أصغر من المجموعة الأصلية) والمجموعة الجزئية الثامنة حسب الاصطلاح هي
 المجموعة الخالية، وهذه تمثل المجموعة التي لا يوجد بها أي عنصر. إذا كانت H
 مجموعة جزئية من E فإننا نكتب $H \subset E$ أو $E \supset H$ ، وأحياناً نقول إن E تحوي H
 أو أن E تغطي H . إذا كانت H مجموعة جزئية من E ولا تساوي
 E ، نقول إن H مجموعة جزئية فعلية من E .

إذا كانت X عنصراً من E فإننا نكتب $X \in E$. في الغالب، نقول إن X من
 E ، أو إن X تنتمي إلى E أو إن E تحوي X وجميعها تعني الشيء نفسه. بما أن
 عناصر المجموعات تختلف عن المجموعات نفسها، فعلينا أن نميز بين العنصر X
 والمجموعة المكونة من العنصر X وحده. في العادة، نرمز للمجموعة الأخيرة بالرمز
 (X) . الرموز $X \in E$ و $(X) \subset E$ تعني نفس الشيء.

الفضاء مجموعة شاملة، بمعنى أننا نأخذ جميع مجموعاتنا منها. إذا كان
 الفضاء Ω و $E \subset \Omega$ ، فإن مكملة E (بالنسبة لـ Ω) هي المجموعة المكونة من جميع
 عناصر Ω والتي لا تنتمي للمجموعة E . نرمز لمكملة E بالرمز $(C(E))$. فمثلاً، إذا
 كانت Ω تمثل حروف الأبجدية في اللغة الإنجليزية أو E الحروف الساكنة في اللغة
 الإنجليزية فإن $(C(E))$ تتكون من حروف العلة. أما إذا كانت E تتكون من الحرف
 a فإن $(C(E))$ يصبح مجموعة الحروف b, c, \dots, z . إذا كانت E تشمل جميع حروف
 الأبجدية، فإن $(C(E))$ هي المجموعة الخالية. إذا كانت E خالية، فإن $(C(E)) = \Omega$.

تمرين (١-١)

اثبت أن $C(C(E)) = E$.

أحيانا نضطر إلى حساب مكملات مجموعة معينة بالنسبة إلى فضاءات مختلفة، في هذه الحالات نستعمل رموزاً خاصة.

إذا كانت E, F مجموعتين، فإننا نستطيع أن نكون منها مجموعتين أخريتين، وحيث إن هذا يحدث باستمرار فإنه يوجد مسميات خاصة لهاتين المجموعتين. المجموعة الأولى هي اتحاد المجموعتين وتكتب $E \cup F$ (أحيانا نسميها المجموع ونكتبها $E + F$)؛ وتتكون من جميع عناصر E و F (العناصر الموجودة في المجموعتين؛ العنصر المشترك بين المجموعتين يحسب مرة واحدة فقط). المجموعة الثانية هي تقاطع المجموعتين وتكتب $E \cap F$ (أحيانا تسمى الضرب وتكتب $E \cdot F$ أو EF)؛ وتتكون هذه المجموعة من جميع العناصر المشتركة بين E, F . إذا كانت $E \cap F$ خالية فإننا نقول إن E, F منفصلتان، أي أن E, F منفصلتان إذا لم يوجد عناصر مشتركة بينهما.

تمرين (٢-١)

إذا كانت Ω أحرف الهجاء و E تتكون من الأحرف الساكنة، F مجموعة الحروف التي تظهر في الجملة Real functions (الحرف n يحسب مرة واحدة). برهن أن:

$$(أ) \quad E \cup F = \Omega \quad ؛ \quad (ب) \quad F \supset C(E) \quad ؛ \quad (ج) \quad C(F) \subset E$$

$$(د) \quad C(E) \text{ و } F \cap E \text{ منفصلتان.}$$

هناك العديد من الصعوبات المنطقية التي تظهر إذا استعملنا نظرية المجموعات بدون قيود، وقد أدت هذه الصعوبات إلى الكثير من الجدل والنقاش. لحسن الحظ لا تظهر هذه الصعوبات إلا في مراحل تجريدية متقدمة لانحتاجها في هذا الكتاب ومجالات مصطنعة إلى حد ما وعليه فإننا نستطيع أن نتجاهل هذه الصعوبات من بقية هذا الكتاب. بعض الجمل التي يظهر أنها تعرف مجموعات لا تعرفها من الحقيقة، مثلها مثل أن بعض مجموعات الحروف الهجائية لا تمثل كلمات حقيقية (مثل Frong). فمثلاً، مع أننا نستطيع الحديث عن مجموعات عناصرها هي أيضاً

مجموعات، إلا أننا لا نستطيع الحديث عن مجموعة جميع المجموعات. لنفرض أننا نستطيع، إذاً مجموعة جميع المجموعات ستحتوي نفسها كعنصر. هذه ظاهرة غريبة، ومع ذلك يوجد مجموعات أخرى يظهر للوهلة الأولى أنها تحقق هذه الظاهرة، كمثال، نأخذ مجموعة الأشياء المعرفة بأقل من ثلاث عشرة كلمة (بما أن هذه المجموعة نفسها معرفة بأقل من ثلاث عشرة كلمة). لنفرض أننا قررنا أن نبعد جميع المجموعات التي هي عناصر من نفسها. المجموعات الباقية لن تكون عناصر من نفسها؛ كون طائفة هذه المجموعات المقبولة وسمها A . الآن هل A مجموعة مقبولة أو مستبعدة؟ إذا كانت A مجموعة مقبولة فإنها ليست عنصراً من نفسها وعليه فلا بد أن تكون من طائفة المجموعات التي تحقق هذه الخاصية، أي أن A تنتمي للمجموعة A ولذا فإننا نستبعد A . إذا لم نقبل A ، فإن A عنصر من نفسها؛ وبما أن جميع عناصر A مجموعات ليست عناصر من نفسها، إذن فهي مقبولة وعليه فإننا نقبل A . إذاً لو كانت A مجموعة أصلاً لوقعنا في تناقض منطقي. الحل الوحيد لهذه المعضلة هو أن نقول إن الجمل التي نستعملها لتعريف A لا تعرف أي مجموعة في الحقيقة.

سنرى تناقضاً آخر بخصوص «مجموعة جميع المجموعات» في الجزء (٣).

٢ - مجموعات الأعداد الحقيقية

لكي نبدأ، سنفرض أن القارئ يعرف نظام الأعداد الحقيقية. سنفترض معرفة خصائصه الجبرية المتعلقة بالجمع، الطرح، الضرب والقسمة وكذلك المترجمات. يبقى خاصية واحدة ليست معروفة لدى الكثير من الناس مع أنها تمثل الأساس لمفاهيم رئيسية من التفاضل والتكامل مثل مفهوم النهاية ومفهوم التقارب. يمكن التعبير عن هذه الخاصية بعدة صياغات متكافئة، وسوف نختار الصياغة التي تناسبنا. سنأخذ خاصية أصغر حد أعلى (Least upper bound property) كحجر الأساس. قبل أن نشرح معنى هذه الخاصية، نحتاج إلى بعض المصطلحات. لنفرض أن E مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية. نقول إن E محدودة من أعلى إذا وجد عدد M بحيث $x \leq M$ لجميع x في E . مثلاً، مجموعة الأعداد الحقيقية والتي هي أصغر من العدد 2 محدودة من أعلى، ويمكن أن نأخذ $M = 2$ أو

$M = \pi$ أو $M = 100$. علي العكس من ذلك ، مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ليست محدودة من أعلى . إذا كانت E محدودة من أعلى فإن B أصغر حد أعلى إذا كانت $M > B$ يمكن استعمالها كما في التعريف السابق . في مثالنا ، حيث E مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من 2 ، أصغر حد أعلى لـ E هو 2 . يمكن أن نقول إن أصغر حد أعلى لـ E هو العدد B الذي يحقق $X \leq B$ لجميع X في E وإذا كانت $A < B$ فإنه يوجد عنصر X من E على الأقل بحيث $X > A$. أصغر حد أعلى للمجموعة E قد ينتمي أو لا ينتمي إلى E . في المثال السابق ، هذا الحد لا ينتمي إلى المجموعة . إذا عدلنا المثال ، وجعلنا E جميع الأعداد التي لا تزيد عن 2 ، فإن أصغر حد أعلى لـ E يبقى 2 ولكنه ينتمي الآن للمجموعة E .

حتى الآن تكلمنا عن أصغر حد أعلى ولكننا لانعلم عن وجود مثل هذا الشيء . إن خاصية أصغر حد أعلى والتي نقبلها كأحدى مسلمات الأعداد الحقيقية تنص على وجود أصغر حد أعلى لكل مجموعة E غير خالية ومحدودة من أعلى . بمعنى آخر ، لو أخذنا كل الحدود العلوية للمجموعة E فإنه يوجد عنصر أصغر لهذه المجموعة (ومن هنا جاءت التسمية) . سنرمز لأصغر حد أعلى للمجموعة E بالرمز $\sup E$ أو $\sup_{x \in E} x$ عندما ينتمي $\sup E$ لـ E فإننا نكتب أحيانا $\max E$ بدلاً من $\sup E$. إذاً $\max E$ هو أكبر عنصر من E إذا كان للمجموعة E عنصر أكبر . أكبر حد سفلي (Greatest lower bound) يعرف بطريقة مشابهة ونرمز له بالرمز \inf . انظر التمرين (٢-٢) .

الفترة هي مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين عددين ، أو كل الأعداد الحقيقية التي تقع على جهة أو أخرى من عدد معطي . بصورة أدق ، الفترة تتكون من كل الأعداد الحقيقية x التي تحقق متراجحة من الأشكال التالية : $a < x < b$ ، $a \leq x < b$ ، $a < x \leq b$ ، $a \leq x \leq b$ (حيث $a < b$) ، $x > a$ ، $x \geq a$ ، $x < a$ ، أو $x \leq a$. إذا استعملنا قوساً كبيراً بدلاً من \leq أو \geq وقوساً صغيراً بدلاً من $<$ أو $>$ فإننا نحصل علي الرموز التالية للفترة : (a, b) ، $[a, b)$ ، $(a, b]$ ، $[a, b]$ ، (a, ∞) ، $[a, \infty)$ ، $(-\infty, a]$ ، $(-\infty, a)$. وهكذا $(0, 1]$ يعني مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث $0 < x \leq 1$. (استعمال الرموز ∞ هنا لا يعني وجود عدد وإنما هو رمز مناسب) .

تمرين (٢-١)

أوجد مجموعة الحدود العليا، ومجموعة الحدود السفلي، $\sup E$ و $\inf E$ لكل من المجموعات التالية:

(أ) الفترة $(0, 1)$

(ب) الفترة $[0, 1)$

(ج) الفترة $(0, 1]$

(د) الفترة $[0, 1]$

(هـ) مجموعة الأعداد $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

(و) المجموعة المكونة من العدد 0 فقط.

تمرين (٢-٢)

اعط تعريفاً مفصلاً لـ $\inf E$ وصغ خاصية أكبر حد سفلي، واثبت أنها تكافئ خاصية أصغر حد علوي.

إذا لم تكن E محدودة من أعلي فإننا نكتب $\sup E = +\infty$ ، وإذا لم تكن E محدودة من أسفل نكتب $\inf E = -\infty$. هذه اختصارات مناسبة ولا تعني وجود أعداد حقيقية $+\infty$ و $-\infty$ ، هذه الأخيرة ليست أعداد. من الممكن أن ننشئ هذه الأعداد اللانهائية ونضيفها إلى نظام الأعداد الحقيقي ولكن هذا غير مرغوب في معظم الحالات. بغض النظر عن طريقة معالجة هذه الأعداد اللانهائية، إنها ستجعل العمليات الحسابية أصعب مما هي عليه الآن: في البداية يوجد عملية مستحيلة واحدة وهي القسمة على الصفر ولكن إذا جعلنا هذه العملية ممكنة فإننا نحصل على عمليات مستحيلة أخرى.

تمرين (٢-٣)

ابحث نتائج تقديم الأعداد $+\infty$ و $-\infty$ بحيث $\frac{a}{0} = +\infty$ إذا كانت $a > 0$ ، $\frac{a}{0} = -\infty$ إذا كانت $a < 0$.

هل يمكن اعطاء معنى معقول لـ $(-\infty) + \infty$ ؟ وكذلك لـ $(+\infty) - \infty$ ؟
إذا كانت المجموعة محدودة من أعلى ومن أسفل فنقول إنها محدودة . المجموعة غير الخالية والمحدودة E تتميز بأن كلاً من $\inf E$ و $\sup E$ نهائي أو بأنها محتواة في فترة نهائية (a, b) .

لقد افترضنا عند مناقشتنا للحدود العليا والسفلي ان المجموعات غير خالية . لكي نتفادى الحالات الخاصة عندما تكون المجموعة خالية ، سنتفق على أنه إذا كانت E خالية فإن $\sup E = -\infty$ و $\inf E = +\infty$. هذا الاصطلاح يمكننا من أن نقول أن $\sup (E \cup F)$ يساوي العنصر الأكبر من $\sup E$ و $\sup F$ بدون ضرورة فحص ما إذا كانت المجموعات E أو F خالية .

تمرين (٢-٤)

إذا كانت E غير خالية ، فبرهن أن $\inf E \leq \sup E$ ، وأن علاقه تصبح فعلية (\leq) إذا كانت E تحوي عنصرين على الأقل .

٣ - المجموعات القابلة وغير القابلة للعد

إذا كانت لدينا مجموعة E بخمسة عناصر مثل أصابع اليد فإننا نستطيع عد المجموعة E . وهذا يعني تماماً ما نتوقعه ، أى نشير إلى عناصر E واحداً واحداً بينما نعد 1, 2, 3, 4, 5 . بمعنى آخر ، نرقم عناصر E بواسطة الأعداد 1, 2, 3, 4, 5 . بلغة الرياضيات نقول إننا وضعنا عناصر E في تناظر أحادي مع الأعداد 1, 2, 3, 4, 5 .

إنه من المفيد تعميم مفهوم العد إلى مجموعات بعدد لانهائي من العناصر . لنفرض أن E مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة . في هذه الحالة ، لا نستطيع استهلاك جميع العناصر عن طريق عدها واحداً بعد الآخر وذلك لأن العناصر كثيرة جداً . ومع ذلك ، نستطيع تصور ترقيم جميع عناصر E بالأعداد الصحيحة الموجبة ، بحيث

يرتبط كل عنصر من E بعدد صحيح مختلف: ما علينا إلا أن نرقم كل عدد زوجي بالعدد الذي يساوى نصفه، أي أننا نربط العدد $2n$ بالعدد n . حيث إنه من الممكن إيجاد تناظر أحادي بين الأعداد الزوجية والأعداد الصحيحة كلها بهذه الطريقة، فيمكن القول بأنه يوجد نفس العدد من المجموعتين، بدون تحديد عدد عناصر هذه المجموعات.

إن أهمية هذا المفهوم تأتي بالدرجة الأولى من وجود مجموعات لا يمكن عدّها وعلى هذا الأساس يمكن تصنيف المجموعات حسب إمكانية عدّها أو عدمه. يمكن اعتبار المجموعات غير القابلة للعد «أكبر من المجموعات القابلة للعد». (كما رأينا قبل قليل، المجموعة قد لا تكون أكبر من إحدى مجموعاتها الجزئية الفعلية بهذا المفهوم الجديد). قبل أن نبرهن على وجود مجموعات غير قابلة للعد، سوف نحتاج إلى بعض المصطلحات الجديدة وسوف نعطي أمثلة إضافية لمجموعات قابلة للعد.

لكي نعد مجموعة علينا أن نضع عناصرها في تناظر أحادي مع مجموعة ما من الأعداد الصحيحة الموجبة المتتالية والتي تبدأ بالعدد 1، وهذه المجموعة قد لا تكون بالضرورة مجموعة جزئية فعلية من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. إذا أمكن عد مجموعة نقول إنها قابلة للعد. (المجموعة الخالية قابلة للعد أيضا: حيث المجموعة الجزئية المناسبة من الأعداد الصحيحة هي المجموعة الخالية). نستطيع كتابة عناصر مجموعة غير خالية وقابلة للعد على النحو التالي x_1, x_2, x_3, \dots حيث x تمثل أي عنصر من المجموعة والرموز السفلية تمثل الأعداد الصحيحة المتتالية المستخدمة في عد المجموعة إذا بدأنا بعد مجموعة قابلة للعد فإما أن نصل إلى عنصر أخير أو تستمر عملية العد إلى ما لا نهاية. في الحالة الأولى، نقول إن المجموعة منتهية وفي الحالة الثانية نقول إن المجموعة غير منتهية قابلة للعد.

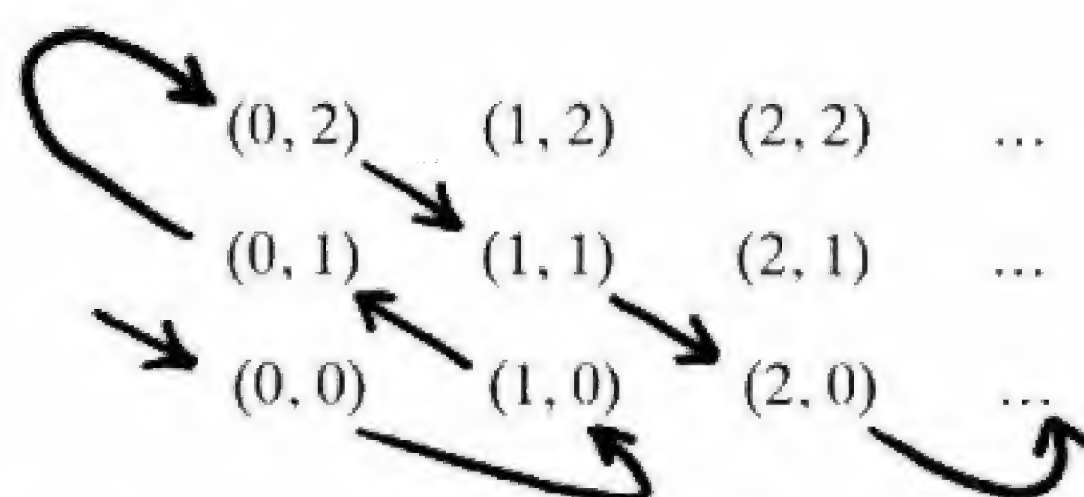
إن مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة قابلة للعد، حيث يمكن ترقيم الأعداد الموجبة بواسطة الأعداد الفردية الموجبة وترقيم الأعداد السالبة بالأعداد الزوجية الموجبة على النحو التالي:

العناصر	...	3	2	1	-1	-2	-3	...
الترقيم	...	5	3	1	2	4	6	...

تمرين (٣-١)

برهن بطريقة مشابهة أن اتحاد أي مجموعتين غير منتهيتين وقابلتين للعد تكون قابلة للعد.

والآن نثبت أن النقاط الشبكية (Lattice) في المستوي قابلة للعد. هذه هي النقاط التي إحداثياتها أعداد صحيحة، مثلاً $(1, 2)$ أو $(-5, 18)$. نستطيع أن نعد هذه النقاط بسهولة كما في الشكل التالي (لتبسيط الشكل، نوضح النقاط الشبكية التي في الربع الأول فقط، ولكن يمكن عد جميع نقاط الشبكية باستعمال تمرين «٣-١» عدة مرات).



بدون رسم الشكل، يمكن أن نتصور تجميع جميع النقاط الشبكية (m, n) بحيث $m + n$ تساوي $0, 1, 2, 3, \dots$ وبعد ذلك نعد المجموعات واحدة بعد الأخرى. كل مافعلناه في الشكل هو تمثيل نقاط الشبكية في الربع الأول كاتحاد فئة قابلة للعد من مجموعات قابلة للعد: المجموعات هي الصفوف الأفقية المتتالية.

يمكن دراسة مجموعات أكثر تعقيداً وذلك باستخدام الحقيقة القائلة إن كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد تكون قابلة للعد. بعبارة أخرى، النظرية تقول إذا أمكن ترقيم عناصر مجموعة ببعض الأعداد الصحيحة الموجبة بشرط أن يستعمل كل منها مرة واحدة فقط، فإنه يمكن ترقيم العناصر باستعمال جميع الأعداد الصحيحة الموجبة. للتأكد من هذا، لاحظ أن كل عنصر من المجموعة الجزئية المعطاة من المجموعة القابلة للعد يرتبط بعدد صحيح موجب. خذ العنصر المرتبط بأصغر رقم واعطه الرقم الجديد 1؛ بعد ذلك خذ العنصر المرتبط بأصغر رقم من العناصر المتبقية (إذا بقي عناصر) واعطه الرقم الجديد 2، وهلم جرا.

الآن نرى بسهولة أن الأعداد النسبية الموجبة تكون مجموعة قابلة للعد. يمكن

كتابة أي عدد نسبي موجب في صورة كسر $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث q, p أعداد صحيحة موجبة. إذا ربطنا الكسر $\frac{3}{11}$ بالنقطة الشبكية $(3, 11)$ ، وبشكل عام نربط $\frac{p}{q}$ بالنقطة (p, q) ، وهكذا نحصل على تناظر أحادي بين الأعداد النسبية ومجموعة جزئية من نقاط الشبكية، أي مع مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد. إذن الأعداد النسبية الموجبة تكون مجموعة قابلة للعد.

تمرين (٢-٣)

اثبت أن اتحاد أي فئة قابلة للعد من مجموعات قابلة للعد تكون قابلة للعد. وهذا مثال أصعب يتعلق بالأعداد الجبرية: هذه هي الأعداد (حقيقية أو مركبة) والتي يمكن أن تكون جذور لكثيرات حدود عواملها أعداد صحيحة (مثلاً جميع الأعداد النسبية، $\sqrt{2}, i, \sqrt[3]{7}, 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7}$) لكي نبرهن أن مجموعة الأعداد الجبرية قابلة للعد، نلاحظ أولاً أنه يوجد مجموعة قابلة للعد فقط من كثيرات الحدود الخطية بعوامل صحيحة، وكذلك مجموعة قابلة للعد من كثيرات الحدود من الدرجة الثانية بعوامل صحيحة وهكذا.

تمرين (٣-٣)

برهن صحة الجملة السابقة.

إن عدد جذور كثيرات الحدود والتي درجتها n وعواملها صحيحة لا يمكن أن يزيد عن n وعليه فإنها جميعاً قابلة للعد. لذا فإن طائفة جذور كثيرات الحدود من جميع الدرجات وبمعامل صحيحة تصبح مجموعة قابلة للعد من مجموعات قابلة للعد وعليه فإنها قابلة للعد.

وكمثال أكثر تجريداً نأخذ جميع المجموعات الجزئية المنتهية من مجموعة معينة قابلة للعد. مجموعة المجموعات الجزئية المكونة من عنصر واحد قابلة للعد، كذلك مجموعة المجموعات الجزئية بعنصرين قابلة للعد، وهكذا. نحصل مرة أخرى على مجموعة قابلة للعد من مجموعات قابلة للعد. (كما سنرى فيما بعد، المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية من مجموعة لانهائية وقابلة للعد غير قابلة للعد).

يمكن استعمال مفهوم قابلية العد أحياناً لإثبات وجود بعض الأشياء ذات خواص معينة . نأخذ مثلاً بسيطاً ، نبرهن أن الأعداد الحقيقية ليست جميعها جبرية . (العدد غير الجبري يسمى عدداً متسامياً Transcendental) الأعداد الحقيقية الجبرية كما نعرف قابلة للعد ، سنفرض في البداية أنها معدودة ومكتوبة على شكل كسور عشرية . لكي نبسط الرموز وبدون الإخلال بالبرهان ، سنقتصر فقط على الأعداد بين 0, 1 .

يمكن تمثيل أي عدد حقيقي بين 0 ، 1 بواسطة كسر عشري فمثلاً

$$1/7 = 0.1428571428571428 \dots$$

$$\pi - 3 = 0.14159265358979323846 \dots$$

وبالعكس ، كل كسر عشري من هذه الصيغة يمثل عدداً حقيقياً بين 0, 1 ، إذا كتبنا مثلاً .

$$x = 0.123456789101112131415 \dots$$

فإن x بالتأكيد عدد حقيقي بين 0, 1 ، بالرغم من عدم قدرتنا على ربطه مع أي الأعداد المعروفة لدينا . (للمزيد من التفاصيل حول الكسور العشرية انظر الجزء ٦) . لنفرض أننا عددنا جميع الأعداد الحقيقية الجبرية بين 0, 1 ، إذاً يوجد الأول ، الثاني ، الثالث ، وهكذا ، دعونا نسميها a_1, a_2, a_3, \dots من هذا نحصل على عمود من الكسور العشرية ، والتي قد تبدأ بشيء كالتالي :

$$a_1 = 0.215367 \dots$$

$$a_2 = 0.652489 \dots$$

$$a_3 = 0.061259 \dots$$

$$a_4 = 0.300921 \dots$$

هذه القائمه تحوي جميع الأعداد الجبرية بين 0, 1 ، أي أن كل عدد جبري سيظهر في هذه القائمه عاجلاً أو آجلاً . نستطيع الآن بسهولة أن نصنع كسراً

عشرياً لا يظهر في هذه القائمة أبداً وعليه فإنه غير جبري .
فمثلاً، إذا كتبنا 0.5655 فنكون بدأنا بكسر عشري يختلف عن a_1
في الخانة العشرية الأولى، ويختلف عن a_2 في الثانية وعن a_3 في الثالثة وعن a_4
في الرابعة، وطبعاً هذا العدد يختلف عن كل من الأعداد الأربعة . نستطيع الاستمرار
حيث نضع 5 في الخانة n إذا كانت a_n لا تساوي 5 ونضع 6 في الخانة n إذا كانت a_n
تساوي 5 . الكسر الناتج يختلف عن كل a_n في الخانة n ولذا فإنه
لا يمكن أن يظهر في قائمة الأعداد الجبرية ولذا فهو غير جبري .

نستطيع أن نصف العملية السابقة بصورة موجزة إذا جعلنا أرقام العدد
الجبري بالنوني $a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots$ ونصنع العدد الجديد $b_1 b_2 b_3 \dots$ حيث $b = 0$
 $b_n = 5$ إذا كان $a_{n,n} \neq 5$ و $b_n = 6$ إذا كان $a_{n,n} = 5$. (لاحظ أنه لا يوجد أهميه خاصه
للعددين 5, 6) .

أحياناً نسمع الاحتجاج على هذا البرهان وإنه «برهان وجود بحث» ولا يعطي
أي مثال صريح لعدد متسامي . هذا غير صحيح . على الأقل من حيث المبدأ نستطيع
أن نعد الأعداد الجبرية بصورة صريحة ونوجد مفكوكاتها العشرية ومن هذا
يمكن كتابة عدد متسامي واحد على الأقل إلى أي عدد مرغوب من
الخانات العشرية . السبب في أن العدد π مثلاً يبدو محسوساً أكثر
من العدد الذي نتحدث عنه هو ظهور π في حالات كثيرة ولذا فإننا
نعرف الكثير عنه، فمثلاً حسبت قيمة π إلى بضعة آلاف من الخانات العشرية * .

لقد برهنا على وجود عدد متسامي، لكي نثبت أن عدداً معيناً
هو في الحقيقة متسامي صعب جداً: هذه مسألة في نظرية الأعداد وتتطلب
طرقاً أعمق من البرهان البسيط المستعجل هنا . إن تسامي
العدد e على قدر لا بأس به من الصعوبة وتسامي π أصعب
بكثير، وكذلك e^π و $2^{\sqrt{2}}$ أصعب أيضاً؛ وفي الحقيقة لأحد يعلم
فيما إذا كان العدد π^e متسامياً أو حتى إذا كان غير نسبي .

* الرموز العلوية الواردة في النص ترجع إلى الملاحظات الواردة في نهاية الكتاب .

هناك عدد متسامي آخر وهو $0.10100100000010 \dots$ حيث يوجد $n!$ من الأصفار بعد الواحد في الخانة النونية. هذا العدد المتسامي أبسط من π أو e حيث نستطيع أن نحدد أى من أرقامه بدون صعوبة شديدة بينما لا نستطيع عمل الشيء نفسه بالنسبة للأعداد π أو e .

إذا تأملنا في برهاننا السابق حول وجود أعداد متسامية، فإننا سنجد أننا لم نستعمل أي خاصية للأعداد الجبرية ماعدا كونها قابلة للعد. بنفس الطريقة، نستطيع إثبات أنه إذا كانت E أي مجموعة قابلة للعد من الأعداد الحقيقية بين $0, 1$ فلا بد من وجود عدد حقيقي بين $0, 1$ لا ينتمي إلى E . إذاً، لا يمكن لأي مجموعة قابلة للعد أن تستهلك مجموعة الأعداد الحقيقية بين $0, 1$ ، بمعنى آخر نقول إن مجموعة الأعداد الحقيقية بين $0, 1$ ليست قابلة للعد.

تمرين (٣-٤)

لا يوجد أهمية خاصة للفترة $(0, 1)$ بالذات، عدل بالنقاش السابق أو استعمل النتيجة لتبرهن أن مجموعة الأعداد الحقيقية في أي فترة مهما كانت صغيرة غير قابلة للعد.

تمرين (٣-٥)

برهن أن مجموعة الأعداد الحقيقية في $(0, 1)$ والتي لا تحتوي مفكوكها العشري على الرقم 3، غير قابلة للعد. (العدد 3 هنا ليس له أي أهمية مميزة).
لقد عرفنا مجموعة بأنها منتهية إذا كانت قابلة للعد ولكن ليست لانهائية قابلة للعد. من الطبيعي أن نسمي مجموعة لانهائية سواء كانت قابلة للعد أو غير قابلة للعد مادامت غير منتهية. أي مجموعة غير منتهية تحتوي على مجموعة جزئية لانهائية قابلة للعد. لنثبت هذا، نختار عنصراً أولاً x_1 بصورة عشوائية. المجموعة لا تزال لانهائية بعد أن أخذنا العنصر x_1 منها (لماذا؟)، نختار عنصراً آخر x_2 من المجموعة المتبقية ونستمر في تكرار هذه العملية. هذه العملية لا تنتهي أبداً (لماذا؟) إذاً مجموعتنا الأصلية تحتوي على المجموعة الجزئية اللانهائية والقابلة للعد x_1, x_2, \dots .

تمرين (٦-٣)

اجب على الأسئلة في الفقرة السابقة.

تمرين (٧-٣)

إذا كانت E مجموعة لانهائية و F هي المجموعة E بعد حذف أحد عناصرها فاثبت وجود تناظر أحادي بين المجموعتين. إذن يمكن إيجاد تناظر أحادي بين أي مجموعة لانهائية مع مجموعة جزئية فعلية منها.

تمرين (٨-٣)

عين تناظراً أحادياً بين فترة منتهية ومجموعة الأعداد الحقيقية.

كتطبيق آخر للمفاهيم السابقة سوف نبرهن أن المجموعة A المكونة من جميع المجموعات الجزئية لمجموعة غير خالية E هي «أكبر» من المجموعة E . كلمة أكبر هنا تعني عدم وجود تناظر أحادي بين المجموعة A والمجموعة E أو أي مجموعة جزئية من E . سوف نحتاج إلى هذه الحقيقة في المستقبل ولكنها تبرر ماذكرناه حول الطبيعة المتناقضة لمفهوم «مجموعة جميع المجموعات».

تمرين (٩-٣)

اثبت أن مجموعة جميع المجموعات متناقضة مستخدماً النظرية السابقة.

في حالة المجموعات المنتهية نجد بسهولة مجموعتين جزئيتين للمجموعة المكونة من عنصر واحد (المجموعة نفسها والمجموعة الخالية)، ونجد كذلك أربع مجموعات جزئية للمجموعة المكونة من عنصرين (المجموعة نفسها، مجموعتين تحتوي كل منها على عنصر واحد والمجموعة الخالية)، وكذلك نجد ثمان مجموعات جزئية في المجموعة المكونة من ثلاثة عناصر، وبشكل عام يوجد 2^n مجموعات جزئية في المجموعة المكونة من n من العناصر. إذن النظرية صحيحة في حالة المجموعات المنتهية، البرهان التالي ينطبق على جميع المجموعات التي تحوي عنصراً واحداً على الأقل.

لتكن E مجموعة بعنصر واحد على الأقل ولنفرض إمكانية إيجاد تناظر أحادي

بين مجموعة جميع المجموعات الجزئية في E ومجموعة جزئية H في E . بمعنى آخر، نفترض إمكانية تسمية المجموعات الجزئية F_x حيث x عنصر في H ، بحيث نسمي كل مجموعة جزئية وبدون استعمال أي عنصر في H أكثر من مرة واحدة. سوف نحصل من هذا على تناقض وهذا يدل على عدم وجود التناظر الأحادي أصلاً. سوف نكون مجموعة جزئية G من E على النحو التالي. لكل x من H نفحص F_x ونرى ما إذا كانت F_x تحوي x . إذا لم تكن x في F_x فإننا نضع x في G (فمثلاً العنصر x الذي يجعل F_x المجموعة الخالية، ينتمي إلى المجموعة G ، بينما x التي تجعل F_x تساوي E لا ينتمي إلى G). إذاً G مجموعة جزئية فعلية من E وحسب افتراضنا فالمجموعة G ترتبط بأحد عناصر H وليكن z ، أي أن G هي F_z . ولكن من تعريف G ، إذا كان z من F_z فإن z لا ينتمي إلى G ومنه نجد أن $G \neq F_z$ ، وكذلك إذا لم يكن z في F_z فإن G يحوي العنصر z بينما F_z لا يحويه ومنه نجد أن $G \neq F_z$. وهكذا نستنتج من افتراضنا الأصلي وجود تناقض وهو أن G تساوي F_z و G لا تساوي F_z وهذا يدل على أن الفرضية الأصلية غير ممكنة. النظرية السابقة تدل على أن مجموعات الأعداد الحقيقية أكثر من الأعداد الحقيقية نفسها.

وبطريقة مشابهة يمكننا أن نثبت أن الدوال الحقيقية المعرفة على الأعداد الحقيقية أكثر من الأعداد الحقيقية.

الآن نبرهن الحقيقة التي تبدو مذهشة وهي أن عدد النقاط على قطعة مستقيمة يساوي عددها في مساحة مربعة: أي أنه يمكن إيجاد تناظر أحادي بين الأعداد الحقيقية بين $0, 1$ وجميع النقاط في مربع. (النقاط في مربع أزواج مرتبة من الأعداد الحقيقية) الفكرة العامة للتناظر هنا سهلة: إذا كان لدينا عدداً حقيقيين في صورتيهما العشرية فإننا نشبك أرقام العددين لنحصل على عدد حقيقي وبالعكس، نستطيع أن نحلل الصورة العشرية لأي عدد حقيقي ونحصل على زوج من الأعداد الحقيقية. لكي نجعل الصورة العشرية وحيدة، سوف نختار الصورة العشرية غير المنتهية عندما يكون هناك خيار: فمثلاً نختار $0.243999 \dots$ بدلاً من $0.244000 \dots$. إن جعل الزوج المرتب (p, q) حيث $p = 0.p_1p_2p_3 \dots$ ، $q = 0.q_1q_2q_3 \dots$ يناظر العدد $0.p_1q_1p_2q_2 \dots$

لا يمكن أن ينجح، فمثلاً العدد $0.13201020 \dots$ يناظر (p, q) حيث $p = 0.1212 \dots$ ، $q = 0.300 \dots$ والأخير عدد عشري غير مقبول حسب اتفاقنا - نستطيع أن نتحاشى هذه الصعوبة بسهولة. ماعليها إلا أن نضم كل رقم لايساوي الصفر إلى سلسلة الأصفار التي تسبقه مباشرة ونعامل هذه المجموعات من الأرقام كوحدات مستقلة. فمثلاً $0.13201020 \dots$ يناظر الآن الزوج (p, q) حيث $p = 0.1202 \dots$ و $q = 0.301 \dots$ وبالمثل الزوج (p, q) حيث $p = 0.003100054 \dots$ ، $q = 0.100359 \dots$ يناظر العدد الحقيقي $0.003110030005549 \dots$.

كثيراً ما يصعب تحديد تناظر أحادي بين مجموعتين، وقد يكون أسهل علينا إيجاد تناظر أحادي بين كل مجموعة ومجموعة جزئية من الأخرى. نظرية شرودر - برنشتاين التالية (Schroeder-Bernstein theorem) مفيدة في هذه الحالات. إذا كان لدينا مجموعتان A, B وأمكن إيجاد تناظر أحادي بين A ومجموعة جزئية من B وكذلك تناظر أحادي بين B ومجموعة جزئية من A فإنه يوجد تناظر أحادي بين A, B ^(١). لنفرض في البداية أن المجموعات الجزئية في A, B المذكورة في النظرية لاتساوي A, B وإلا فليس لدينا مانثبته. لدينا تناظر ان أحاديان، الأول بين A ومجموعة جزئية من B (نسميه S) والآخر بين B ومجموعة جزئية من A (نسميه T). خذ أي عنصر a_1 في A واوجد صورته b_1 في B بالتحويل S ، ثم اوجد صورة b_1 بالتحويل T ولتكن a_2 وهلم جرا. هذه العملية قد تعود بنا إلى a_1 بعد عدد منته من الخطوات وقد لاتنتهي أبداً. ولكن الشيء الذي لايمكن حدوثه هو أن نحصل على سلسلة من العناصر التي تتقاطع مع نفسها فمثلاً أن يكون $a_5 = a_2$ ، لوحدث هذا فإن T تحمل b_1 إلى a_2 وتحمل b_4 إلى a_2 . هذا يتناقض مع كون T تناظراً أحادياً إلا إذا كان $b_1 = b_4$ وفي هذه الحالة نجد أن $a_1 = a_4$. كذلك قد يحدث أن يكون a_1 صورة لأحد عناصر B بالتحويل T وفي هذه الحالة نستطيع أن نمدد السلسلة (chain) من a_1 في الاتجاه الآخر بصورة قد لاتنتهي. إذا بقي أي عنصر من A فإننا نأخذه ونبدأ سلسلة جديدة.

بهذه الطريقة نحصل على تجزئة لعناصر A في مجموعات منفصلة: A_1 تتكون من العناصر التي تنتمي إلى سلاسل مكونة من زوج من العناصر (أي

من زوجين من العناصر (أي $a_1 \xrightarrow{S} b_1 \xrightarrow{T} a_2 \xrightarrow{S} b_2 \xrightarrow{T} a_3 \dots$) إلخ. كذلك قد يوجد عناصر في A تنتمي إلى سلاسل لانهائية. هناك ثلاثة أصناف من السلاسل اللانهائية: هناك سلاسل بعنصر أول في A بحيث لا يتحول أي من عناصر B إليه بتأثير T ، وسلاسل بعنصر أول في B ، وأخيراً سلاسل ليس لها عنصر أول. نسمي هذه المجموعات $A_0, A_{-1}, A_1, A_2, \dots, A_\infty$ على الترتيب. المجموعات $A_0, A_{-1}, A_1, A_2, \dots, A_\infty$ منفصلة وكل عنصر في A ينتمي إلى واحدة منها. لتكن B_k مجموعة عناصر B التي تنتمي إلى سلاسل تحتوي على عناصر من A_k . حيث إننا نستطيع أن نبدأ السلسلة من عنصر في B بدلاً من عنصر في A فإننا نجد أن B_k مجموعات منفصلة وكل عنصر في B ينتمي إلى واحدة منها.

من الواضح أن A_1 و B_1 متناظرتان أحادياً. A_1 تحوي زوجاً من عناصر A مرتبطة بزوج من عناصر B ، نجعل A_2 تناظر B_2 وذلك بربط العنصر الأول من زوج A بالعنصر الأول من زوج B وهكذا. نستمر بنفس الأسلوب مع A_k و B_k لجميع قيم $k = 3, 4, \dots$. كذلك نضع A_0 في تناظر أحادي مع B_0 وذلك بالتعامل مع كل سلسلة على حدة. اربط العنصر الأول a_1 بصورته b_1 ، اربط a_2 بصورته b_2 وهكذا. بمعنى آخر استخدم S لتحويل A_0 إلى B_0 . لاحظ أننا هنا نستخدم كون السلاسل في A_0 غير منتهية. بنفس الطريقة، نستخدم T لإيجاد تناظر أحادي بين A_{-1} و B_{-1} . أخيراً A_∞ و B_∞ تتكون من سلاسل غير منتهية من الطرفين هنا نستطيع استعمال S أو T . بهذا نكون قد أوجدنا تناظراً أحادياً بين A_k و B_k المرافقة لها وهذا يثبت وجود تناظر أحادي بين A و B .

كتطبيق لنظرية شرودر - برنشتاين، سوف نبرهن أن المجموعة المكونة من جميع مجموعات الأعداد الطبيعية الموجبة تساوي مجموعة الأعداد الحقيقية من حيث العدد (تذكر أن مجموعة المجموعات المنتهية من الأعداد الطبيعية الموجبة مجموعة لانهائية قابلة للعد). في البداية، إذا كان لدينا عدد حقيقي r بين $0, 1$ فإننا نكتبه في صيغة عشرية غير منتهية، مثل $0.20015907 \dots$. هذا العدد يعين مجموعة الأعداد

التالية 20, 10000, 500000, 9000000, ... وبشكل عام، إذا ظهر الرقم $a \neq 0$ في الخانة العشرية النونية للعدد r فإننا نضيف إلى مجموعتنا العدد الذي صيغته العشرية a متبوعة بنون من الأصفار. على هذا الأساس، نحصل على مجموعة من الأرقام المختلفة وأي عددين مختلفين يعطيان مجموعتين مختلفتين من الأرقام.

قد يبدو لأول وهلة أننا لانحصل إلا على جزء يسير من مجموعات الأعداد الطبيعية الممكنة. ولكن دعونا نأخذ مجموعة اختيارية من الأعداد الطبيعية ولتكن S . سوف نعين عدداً حقيقياً وحيداً يناظر S بالطريقة التالية. أولاً نكتب العدد $u = 0.123456789101112 \dots$ (العدد مكون من الأعداد الطبيعية بترتيبها الطبيعي). إذا ظهر الرقم n في S فإننا نستبدله في u بسلسله من الأصفار. على سبيل المثال، إذا كانت $S = \{1, 8, 12, 13, 17\}$ فإن العدد الحقيقي الذي يناظر S هو $0.02345670910110000141516001819 \dots$

وإذا كانت S تتكون من الأعداد الموجبة الزوجية فإن العدد المنشود يكون $0.10305070900110013 \dots$

وهكذا نحصل على تناظر أحادي بين مجموعة الأعداد الطبيعية بكاملها ومجموعة معينة من الأعداد الحقيقية وكذلك تناظر أحادي آخر بين مجموعة الأعداد الحقيقية بكاملها ومجموعة معينة من مجموعات الأعداد الطبيعية. من نظرية شرودر - برنشتاين، نستنتج وجود تناظر أحادي بين المجموعة المكونة من مجموعات الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الحقيقية.

تمرين (٣-١٠)

برهن أن مجموعة متواليات الأعداد الحقيقية تساوي مجموعة الأعداد الحقيقية من حيث العدد.

٤ - الفضاءات المترية (Metric Spaces)

الفضاء مفهوم مرادف لمفهوم المجموعة إلا أننا في الفضاء نركز على المجموعات الجزئية. عندما نصف مجموعة ما بأنها فضاء فإننا في العادة نضع شروطاً إضافية على

عناصر المجموعة. الفضاء المترى مجموعة (غير خالية) حيث نستطيع الحديث عن المسافة بين نقطتين. إنه تعميم للمستقيمات والمستويات والفراغات، حيث نحفظ ببعض الخواص الهندسية في التعميم.

نشترط أن تحقق المسافة بين نقطتين الشروط التالية (المسافة الإقليدية المعتادة تحقق هذه الشروط طبعاً): المسافة عدد حقيقي غير سالب وتكون صفراً إذا تطابقت النقاط فقط، المسافة تبقى نفسها في كل من الاتجاهين الممكنين، مجموع ضلعي مثلث يساوي الضلع الثالث على الأقل. إذا رمزنا للمسافة بين النقاط x, y بالرمز $d(x, y)$ فإن

$$(1) \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, x) = 0, \quad d(x, y) > 0 \text{ إذا } x \neq y \text{ (الخاصة الإيجابية)}$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x) \text{ (خاصية التناظر)}$$

$$(3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (المتراجحة المثلثية)}$$

الكثير من الخصائص الهندسية تتركز على هذه الخواص الثلاث فقط. وعليه فإن الكثير من النظريات حول الفضاء العادي تبقى صحيحة في فضاءات أخرى مختلفة تماماً حيث النقاط ليست نقاطاً عادية ولكن قد تكون دوال مثلاً. إن إمكانية استخدام اللغة الهندسية في الفضاءات المترية تجعل الكثير من المفاهيم حدسية ولكنها قد تضلل أحياناً.

هذه بعض الأمثلة البسيطة للفضاءات المترية. الفضاء الإقليدي أحادي البعد R_1 وهو مجموعة الأعداد الحقيقية حيث $d(x, y) = |x - y|$. الفضاء الإقليدي ثنائي الأبعاد، R_2 وهو مستوى الهندسة التحليلية والمسافة هي المسافة العادية. النقاط هنا أزواج مرتبة من الأعداد الحقيقية (الترتيب يعني أن (x, y) لا يساوي (y, x)). المسافة من (x_1, y_1) إلى (x_2, y_2) تساوي

$$\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}^{1/2}$$

وبنفس الطريقة نعرف الفضاء الإقليدي بنون من الأبعاد R_n .

تمرين (٤-١)

إذا استعملنا النقاط ولكن غيرنا تعريف المسافة فإننا نحصل على فضاء جديد. فمثلاً إذا كانت المسافة على R_2 تساوي $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ فثبت أننا نحصل على فضاء ميري، أوجد مثلاً مجموع ضلعيه يساوي لـضلع الثالث، وارسم المحل الهندسي للنقاط التي تبعد الوحدة عن $(0, 0)$. اعمل الأشياء السابقة إذا كانت المسافة تساوي القيم الكبرى من $|x_1 - x_2|$ ، $|y_1 - y_2|$.

في الأمثلة الثلاثة التالية ستكون عناصر الفضاء متتاليات لانهاية من الأعداد. بما أن عناصر R_n متتاليات بنون من الأعداد، فإنه يمكن اعتبار «فضاءات المتتاليات» هذه تعميم لانهاية الأبعاد للفضاء R_n .

الفضاء C_0 يمثل جميع المتتاليات التي تتقارب إلى الصفر. نقاطه متتاليات من الأعداد: $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ حيث $\lim x_n = 0$ إذا رمزنا للمتتالية بالرمز x ، فإن المسافة $d(x, y)$ تساوي $\sup_{n \geq 1} |x_n - y_n|$. فمثلاً إذا كانت $x = \{1, 1/2, -1/3, -1/4, 1/5, \dots\}$ و $y = \{1, -1, 0, 0, \dots\}$ فإن $d(x, y) = 3/2$.

الفضاء m هو مجموعة المتتاليات المحدودة. عناصره متتاليات من الأعداد ولكن يشترط أن تكون محدودة. المسافة مثلها في الفضاء C_0 . إذا كانت $x = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$ و $y = \{1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, \dots\}$ حيث لا يوجد y_n سالبه أو تزيد عن 9. هنا لا يمكن حساب المسافة $d(x, y)$ إلا إذا عرفنا المزيد عن كيفية تكوين y . إذا علمنا أن $y_9 = 3$ ، $y_{10} = 5$ ، $y_{11} = 8$ ، $y_{12} = 9$ فإننا نلاحظ أن $d(x, y) = 9$ حيث إنها أكبر قيمة ممكنة.

الفضاء L^2 يرمز للمتتاليات التي مجموع مربعات أعضائها متقارب. العناصر هنا متتاليات مثل $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ حيث $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots < \infty$. نعرف المسافة $d(x, y)$ بأنها $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right\}^{1/2}$. لكي نثبت المتراجحة المثلثية في هذه الحالة نحتاج إلى متراجحة منكوسكي (Minkowski's Inequality):

$$\begin{aligned}
d(x, z) &= \{\sum (x_n - z_n)^2\}^{1/2} \\
&= [\sum \{(x_n - y_n) + (y_n - z_n)\}^2]^{1/2} \\
&\leq \{\sum (x_n - y_n)^2\}^{1/2} + \{\sum (y_n - z_n)^2\}^{1/2} \\
&= d(x, y) + d(y, z).
\end{aligned}$$

الآن نأخذ بعض الفضاءات المترية والتي نقاطها دوال.
 الفضاء C يمثل الدوال المتصلة المعرفة على الفترة المغلقة $[0, 1]$. عناصره دوال متصلة $x = x(t)$ حيث $0 \leq t \leq 1$ والمسافة

$$d(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

فمثلاً، إذا كانت $x(t) = \cos \pi t$ و $y(t) = 2t - 1$ فإن $d(x, y) = 2$.
 الفضاء B هو فضاء الدوال المحدودة المعرفة على $(0, 1)$ حيث
 $d(x, y) = \sup_{0 < t < 1} |x(t) - y(t)|$. (علينا أن نكتب \sup بدلاً من \max هنا لأن
 $|x(t) - y(t)|$ قد لا يأخذ قيمته العظمى). فمثلاً، إذا كانت $x(t)$ تساوي $1 - n^{-1}$
 على الفترة $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ حيث $n = 1, 2, \dots$ و 0 تمثل الدالة التي تأخذ القيمة الوحيدة
 صفر على الفترة $(0, 1)$ فإن $d(x, 0) = 1$.
 فضاء الدوال المتصلة على فترة معينة مثل $[0, 1]$ يعطي فضاءً مترياً إذا كانت
 المسافة

$$d(x, y) = \left\{ \int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

تمرين (٢-٤)

أي مجموعة جزئية (غير خالية) من فضاء متري تكون فضاءً مترياً بنفس المسافة المعرفة على الفضاء الأصلي.

تمرين (٣-٤)

يمكن جعل أي مجموعة غير خالية فضاءً مترياً إذا عرّفنا عليها المسافة $d(x, y) = 1$ إذاً $x \neq y$ و $d(x, x) = 0$.

٥ - المجموعات المفتوحة والمغلقة

هناك العديد من المجموعات الهامة في الفضاء المتري والتي تحتاج إلى أسماء خاصة. سوف تخصص الأجزاء 5, 6, 7 لهذه المجموعات الهامة.

إن جوار نقطة x ما هو إلا تعميم لمنطقة دائرية مركزها x : إذن الجوار مجموعة النقاط y التي بعدها عن نقطة x أقل من عدد موجب معين r ، أي $d(x, y) < r$. في الواقع، جوارات x في R_2 هي الأقراص الدائرية المتمركزة حول x . في الفضاء R_1 ، تصبح الفترات التي مركزها x ، وفي R_3 ، تصبح كرات مجسمة. إذا كانت $r < 1$ فإن الجوارات في فضاء التمرين (٣-٤) تصبح نقاطاً وحيدة.

نقول عن مجموعة أنها محدودة إذا كانت داخل جوار ما. فمثلاً الفترة $(0, 1)$ في R_1 محدودة، بينما الفترة $(1, \infty)$ غير محدودة. هذا التعريف يتفق مع التعريف الذي استعملناه في السابق في حالة الفضاء R_1 ، أي أن المجموعة المحدودة لها أصغر حد أعلى وأكبر حد أدنى ولكن هذه الخاصية غير صحيحة في الفضاءات المترية بشكل عام.

تمرين (١-٥)

صف الجوار في الفضاء C .

تمرين (٢-٥)

صف الجوارات في الفضاء المكون من نقاط R_2 حيث الإحداثيات أعداد صحيحة والمسافة هي مسافة R_2 .

إذا كانت E مجموعة في فضاء متري و x تنتمي إلى E فإننا نقول إن x نقطة داخلية من E إذا وجد جوار حول x (مهما كان صغيراً) جميع نقاطه تنتمي إلى المجموعة

E . الهدف من هذا التعريف هو إعطاء مفهوم «داخل مجموعة» بحيث يتفق مع مفهومنا الحدسي لمعنى «الداخل» وهذا التعريف ناجح إلى حد كبير في الفضاء R_2 مثلاً. فعلى سبيل المثال، مجموعة نقاط R_2 ، (x, y) حيث $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ تكون مربع وداخله يتكون من جميع نقاط المربع التي لا تقع على محيطه. على العكس من ذلك، مجموعة النقاط القياسية على R_1 ليس لها نقاط داخلية على الإطلاق. في التمرين (٤-٣)، أخذنا فضاء من نقاط اختيارية حيث المسافة $d(x, y)$ إما 1 أو 0 حسب ما إذا كانت $x \neq y$ أو $x = y$. في هذا الفضاء أي نقطة تنتمي إلى مجموعة لا بد أن تكون نقطة داخلية فيها. في الحقيقة، إذا اعتبرنا أي مجموعة من فضاء ميري على أنها فضاء ميري جديد في حد ذاته بالمسافة الأصلية فإن جميع نقاطه تصبح نقاطاً داخلية في الفضاء الجديد. إذن مفهوم النقطة الداخلية لا يعتمد فقط على المجموعة وإنما على الفضاء الذي تقع فيه المجموعة.

لتكن E مجموعة في فضاء ميري، x ليست بالضرورة في E ولكن كل جوار للنقطة x (مهما كان صغيراً) يحتوي على نقطة واحدة على الأقل من E (قد تكون نفسها) وكذلك نقطة واحدة على الأقل من $C(E)$ (قد تكون x نفسها أيضاً)، وفي هذه الحالة نقول إن x نقطة حدية (Boundary Point) للمجموعة E . حدود E تعني مجموعة النقاط الحدية لـ E . حدود المربع في R_2 هي ما نتوقعه بالضبط. في R_1 ، حدود الفترة $[a, b]$ أو الفترة (a, b) تتكون من النقطتين a, b فقط. وهي أيضاً حدود المجموعة المكونة من النقطتين b, a .

لاحظ أن مفهوم نقطة حدية لا علاقة له بكون المجموعة محدودة. فقد تكون حدود مجموعة غير محدودة، مجموعة غير خالية. فمثلاً النقطة 0 حدية للفترة $(0, \infty)$ ؛ إذا اعتبرنا R_1 مجموعة جزئية من R_2 فإنها حدود نفسها. على العكس من ذلك، قد يحدث أن تكون حدود مجموعة محدودة وغير خالية، مجموعة خالية (ولكن هذا غير ممكن في R_1 أو R_2).

تمرين (٥-٣)

في فضاء التمرين (٥-٢) اثبت أن حدود أي مجموعة تكون مجموعة خالية.

تمرين (٤-٥)

اثبت أن المجموعتين E و $C(E)$ لهما نفس الحدود.

تمرين (٥-٥)

إذا كانت E مجموعة و B تمثل حدود E ، فاثبت أن حدود B تكون مجموعة جزئية من B ، وأنها قد تكون مجموعة جزئية فعلية.

تمرين (٦-٥)

ليكن N جواراً لـ x ، نصف قطره r . ماذا يمكن قوله عن الجوار N :
(أ) إذا كان الفضاء R_2 ؟ (ب) إذا كان الفضاء المترى اختيارياً ؟

المجموعة التي جميع نقاطها داخلية تسمى مفتوحة، والمجموعة التي تحوي جميع نقاط حدودها تسمى مغلقة. كما سنرى، المجموعة قد تكون غير مفتوحة وغير مغلقة، وكذلك قد تكون المجموعة مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت هذه الأمور تعتمد على الفضاء الذي تنتمي إليه المجموعة، وعلى المجموعة نفسها كذلك.

تمرين (٧-٥)

في الفضاء R_1 ، الفترة (a, b) مفتوحة (ولذا نسميها فترة مفتوحة)، والفترة $[a, b]$ مغلقة (ولذا نسميها فترة مغلقة).

تمرين (٨-٥)

هل الفترات $[a, b]$ و (a, b) مفتوحة، مغلقة أو غير ذلك إذا كانت مجموعات جزئية في R_2 ؟

تمرين (٩-٥)

برهن أن الفترة $[0, 1)$ ليست مفتوحة ولا مغلقة في R_1 .

تمرين (١٠-٥)

اثبت أن المجموعة الخالية والفضاء كله يكونان دائماً مفتوحة ومغلقة .

تمرين (١١-٥)

خذ الفضاء المترى المكون من الفترات $(n, n + 1/2)$ في R_1 ، حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ وبمسافة R_1 . اثبت أنه يوجد العديد من المجموعات المفتوحة والمغلقة في نفس الوقت في هذا الفضاء .

تمرين (١٢-٥)

هل مجموعة النقاط القياسية في R_1 مفتوحة ، مغلقة أو غير ذلك؟

تمرين (١٣-٥)

إذا اعتبرنا مجموعة التمرين (١٢-٥) فضاء في حد ذاتها ، بمسافة R_1 ، فاثبت أنه يحوي العديد من المجموعات المفتوحة والمغلقة في آن واحد .

تمرين (١٤-٥)

اثبت أن جميع المجموعات في فضاء التمرين (١٢-٥) ، مفتوحة ومغلقة في آن واحد .

تمرين (١٥-٥)

اثبت أن المجموعة E مفتوحة إذا كانت كل نقطة من E تنتمي إلى مجموعة جزئية مفتوحة من E .

هناك العديد من التعاريف المختلفة لمفاهيم المجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة .

تمرين (١٦-٥)

المجموعة A مفتوحة إذا وإذا فقط لم تحوئاً من نقاطها الحدودية .

تمرين (١٧-٥)

المجموعة مفتوحة إذا وإذا فقط كانت مكملتها مغلقة .

تمرين (١٨-٥)

المجموعة مغلقة إذا وإذا فقط كانت مكملتها مفتوحة .

تمرين (١٩-٥)

عرف نقطة نهاية للمجموعة E بأنها نقطة x (قد تنتمي أو لا تنتمي إلى E) كل جوار لها يحتوي على نقطة واحدة على الأقل من E غير النقطة x . أحياناً نسميها نقطة تجمع أيضاً . المجموعة مغلقة إذا وإذا فقط احتوت على جميع نقاط تجمعها .

تمرين (٢٠-٥)

كل جوار لنقطة نهاية للمجموعة E يحتوي على عدد لا نهائي من نقاط E .

تمرين (٢١-٥)

مجموعة نقاط النهاية لأي مجموعة تكون مغلقة .

تمرين (٢٢-٥)

اوجد نقاط النهاية للمجموعات الآتية في R_1 :

(أ) الفترة $(0, 1)$ ، (ب) المجموعة المكونة من $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ ،

(ج) مجموعة النقاط القياسية في $(0, 1)$.

تمرين (٢٣-٥)

إذا كانت $E = A \cup B$ ، فإن كل نقطة نهاية لـ E إما أن تكون نقطة نهاية لـ A أو نقطة نهاية لـ B .

إذا كانت f دالة حقيقية متصلة ومعرفة على فترة حقيقية و C عدد حقيقي

معطى فإن مجموعة النقاط x التي تحقق $f(x) < C$ ، هي مجموعة مفتوحة، أما المجموعات التي تحقق $f(x) = C$ أو $f(x) \leq C$ فإنها مغلقة.

إن بنية المجموعات المفتوحة في R_1 بسيطة، هذه المجموعات مكونة من عدد قابل للعد من الفترات المفتوحة المنفصلة. الكلمة قابل للعد هنا غير ضرورية: كل مجموعة من الفترات المفتوحة المنفصلة في R_1 لابد وأن تكون قابلة للعد، حيث إن كل فترة تحتوي على عدد قياسي لا يظهر في أي فترة أخرى وعليه فإن مجموعة الفترات هذه في تناظر أحادي مع مجموعة جزئية من الأعداد النسبية.

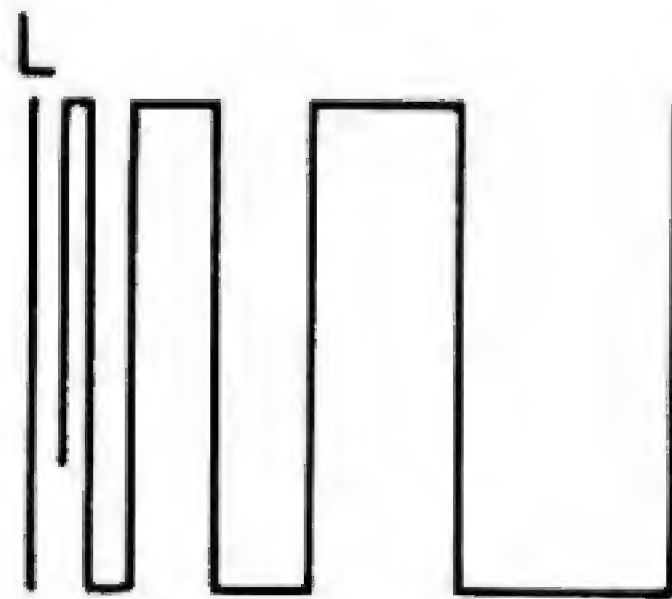
إن البرهان المفصل لكون كل مجموعة مفتوحة غير خالية G في R_1 هي اتحاد فترات مفتوحة يمثل عملية شاقة ولكن الفكرة وراء البرهان بسيطة. بما أن G مفتوحة وغير خالية فإنها تحتوي على نقطة وكذلك جوار لهذه النقطة. نأخذ هذا الجوار الذي هو فترة مفتوحة في أكبر شكل ممكن. إذا لم تستهلك هذه الفترة الموسعة جميع G ، فإننا نأخذ نقطة جديدة وجوار لها في G ونكرر العملية وهكذا نستمر. بهذه الطريقة نأتي على جميع نقاط G .

لكي نعالج الموضوع بعناية أكثر، سوف نفرض أن G محدودة وإلا فإننا نستطيع أن نغطي G بمجموعة قابلة للعد من الفترات المفتوحة ثم نجمع النتائج لتقاطعات G مع هذه الفترات. إذا برهنا وجود أكبر فترة محتواة داخل G وتحتوي نقطة معطاة x ، فهذا يعني وجود أكبر فترة مفتوحة في G (يوجد عدد نهائي من الأطوال أكبر من 1، كذلك يوجد عدد نهائي من الأطوال أكبر من $1/2$ وهكذا). إذا كانت الفترة الكبرى ليست وحيدة، فإنه بإمكاننا أن نرتبها حسب قيمة الطرف الأيسر. نكرر هذه العملية بالنسبة للفترات التالية الأصغر فألاصغر. من هذا نرى أن تمثيل G كاتحاد فترات مفتوحة تمثيل وحيد.

بقي علينا أن نثبت وجود أكبر فترة مفتوحة داخل G وتحتوي نقطة معطاة. طبعاً توجد فترة مثل (a, b) (أي جوار لـ x) داخل G . لتكن B أصغر حد أعلى للأعداد b حيث الفترة (x, b) في G . بنفس الطريقة، اجعل A أكبر حد أدنى للأعداد a حيث الفترة (a, x) في G . بما إن G محدودة فإن A, B أعداد نهائية. إذن B لا تنتمي إلى G ، وإلا فإن G تحتوي على جوار لـ B وفي هذه الحالة لن يكون B

حداً أعلى للمجموعة التي عرف عن طريقها. بنفس الأسلوب نثبت أن A لا تنتمي إلى G أيضاً. إذن الفترة (A, B) في G ولا يمكن تكبيرها بدون الخروج من G . إذا بحثنا عن مجموعات جزئية (غير المجموعة الخالية والفضاء بكامله) في R_1 أو R_2 بحيث تكون مفتوحة ومغلقة فسنتنع بعدم وجود مثل هذه المجموعات. سوف نثبت هذه الحقيقة مستقبلاً. هذه الخاصية في R_1 و R_2 (وبشكل عام R_n) والتي تسمح بالمجموعات التافهة فقط بأن تكون مفتوحة ومغلقة تسمى الترابط (connectedness). نعرف هذه الخاصية في البداية للمجموعات المفتوحة. المجموعة المفتوحة (وخاصة الفضاء بكامله) تكون مترابطة في حالة عدم إمكانية تمثيلها كاتحاد مجموعتين مفتوحتين منفصلتين غير خاليتين. فمثلاً، في الفضاء R_1 ، اتحاد الفترتين المفتوحتين $(0, 1/2)$ و $(1/2, 1)$ غير مترابط لأن كلا من الفترتين مفتوحة، غير خالية ومنفصلة عن الفترة الأخرى.

وبشكل عام، نقول إن المجموعة E مترابطة إذا كان من غير الممكن تغطية E بمجموعتين مفتوحتين تقاطعاتها مع E منفصلة وغير خالية. هذا التعريف قد لا يتفق تماماً مع بديهتنا. سوف نثبت قريباً أن R_1 و R_2 مترابطة. إن مجموعة النقاط القياسية في R_1 غير مترابطة لأنه يمكن تغطيتها مثلاً بالمجموعات المفتوحة المعرفة بالمتراحات $x > \sqrt{2}$ و $x < \sqrt{2}$. على العكس من ذلك فالمجموعة الموضحة في الشكل والتي تتكون من المنحنى المتذبذب الذي يقترب من القطعة المستقيمة والقطعة المستقيمة نفسها مجموعة مترابطة. كما في شكل (١).



شكل (١)

(الرسم البياني للمنحني $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ مع القطعة $-1 \leq y \leq 1$ يعطي شكلاً مماثلاً).
 قد يبدو لأول وهلة إمكانية فصل المستقيم L الذي على يسار الشكل من بقية المجموعة، مثل ما تفصل فترتين مفتوحتين متجاورتين. ولكن أي مجموعة مفتوحة تغطي أي نقطة من L ، لابد وأن تحتوي جوار النقطة من L والجزء المتذبذب من المنحني يقطع أي جوار مثل هذا. ولهذا السبب نفسه، نجد أن المجموعة تبقى مترابطة لو احتفظنا بالنقاط القياسية من L فقط أو النقاط غير القياسية من L .
 باستخدام مجموعات من هذا النوع، نستطيع الحصول على مجموعتين مترابطتين داخل مربع، إحداهما تصل بين رأسين متقابلين من المربع والمجموعة الأخرى تصل الرأسين الآخرين ومع ذلك تبقى المجموعتان منفصلتان.

من الممكن أيضاً الحصول على مجموعة مترابطة بالخاصية التالية:

إذا أزيلت نقطة معينة فإن المجموعة الباقية لا تحوي أي مجموعة جزئية مترابطة على الإطلاق^(٢).

المجموعة قد تكون مفتوحة أو غير ذلك حسب الفضاء الذي تنتمي إليه. ولكن يجب ألا نستنتج من تعريف الترابط بدلالة المجموعات المفتوحة، إن مجموعة معينة قد تتغير من مترابطة إلى غير مترابطة إذا أخذت في فضاء آخر. في الحقيقة، خاصية الترابط تختلف عن خاصية الانفتاح حيث إن الأولى خاصية جوهرية للمجموعة. هذا يعني أنه إذا كانت مجموعة مترابطة في فضاء معين فإنها تبقى مترابطة في أي فضاء آخر طالما أن المسافة لا تتغير على نقاط المجموعة.

سوف نبرهن كذلك على أن خاصية عدم الترابط تعتمد على المجموعة فقط.
 افرض أن E مجموعة في فضاء متري S وأن E غير مترابطة وأن S_1 فضاء جزئي من S و S_1 فضاء جزئي من S_2 حيث $E \subset S_1$. علينا أن نثبت سواء أضفنا نقاطاً إلى S لنحصل على S_2 أو حذفنا بعض نقاط S لنحصل على S_1 فإن المجموعة E تبقى غير مترابطة.

نفترض في البداية أن $E \subset A \cup B$ حيث A و B مفتوحتان في S ومنفصلتان وكل من $A \cap E$ و $B \cap E$ غير خاليه.

الانتقال من S إلى الفضاء الأصغر S_1 بسيط. ماعلينا إلا أن نبدل المجموعات

A و B بالمجموعتين الجزئية A_1 و B_1 من S_1 حيث A_1 تشتمل على نقاط A التي في S_1 ، و B_1 تشتمل على نقاط B التي في S_1 . هذه المجموعات تغطي E ، وتقاطعها مع E غير خال وهي منفصلة. كذلك A_1 مفتوحة بالنسبة لـ S_1 حيث إن أى جوار في S_1 للنقطة p من A_1 يتكون من كل النقاط في S_1 والتي تبعد عن p بمسافة أقل من عدد حقيقي r وهذه النقاط في A ، حيث إن A مجموعة مفتوحة من S . إذن هذه النقاط في A_1 . كذلك B_1 مفتوحة بالنسبة لـ S_1 . إذن E تبقى غير مترابطة في S_1 .

الانتقال من S إلى الفضاء الأكبر S_2 أكثر صعوبة. نأخذ الأغطية A و B التي تدل على أن E غير مترابطة في S ونحولها إلى مجموعات في S_2 كمايلي. حيث إن A مفتوحة فإذا كانت $p \in A$ فإن المسافات من p إلى نقاط B لها حد أدنى موجب (نصف قطر جوار النقطة p الذى في A) لكل p في A نضيف إلى A جميع نقاط S_2 والتي أبعادها من p أقل من نصف أكبر حد أدنى للمسافات من p إلى نقاط B . نسمي المجموعة الموسعة A_2 . بنفس الطريقة نحصل على B_2 بتوسيع B .

المجموعتان A_2 و B_2 لاتزالان تغطيان E وتقاطعهما مع E غير خالية. إضافة إلى ذلك، A_2 مفتوحة في S_2 . فإذا كانت $q \in A_2$ فإنه يوجد $p \in A$ بحيث $d(p, q)$ أصغر من نصف المسافة من p إلى أى نقطة من B . إذا كانت q' نقطة من S_2 قريبة من q فإن $d(p, q')$ أقل من نصف المسافة بين p ونقاط B وعليه فإن q' ينتمي كذلك إلى A_2 . هذا يعني أن A_2 مفتوحة في S_2 .

بالمثل نبرهن أن B_2 مفتوحة في S_2 .

أخيراً، A_2 و B_2 منفصلتان فلو كان $q \in A_2$ و $r \in B_2$ فإننا نحصل على q و r من النقاط $p \in A$ و $s \in B$ ؛ و $d(q, r) \geq d(p, s) - d(p, q) - d(s, r)$ بما أن $d(p, q) < \frac{1}{2}d(p, s)$ و $d(s, r) < \frac{1}{2}d(s, p)$ ، فإن $d(q, r) > 0$. هذه المترابطة تعني أن A_2 و B_2 مجموعتان منفصلتان. وهكذا اثبتنا أن E غير مترابطة في S_2 .

نستطيع إثبات أن R_1 مترابط بسهولة. لولم يكن مترابطاً، لكان اتحاد مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين ومنفصلتين. هذه المجموعات مغلقة أيضاً (تمرين ٥-١٧) لأن كل منهما مكملة للأخرى. إذاً يكفي أن نثبت أنه لا يوجد في R_1 مجموعة

جزئية وغير خالية بحيث تكون مفتوحة ومغلقة . بفرض وجود مثل هذه المجموعة وتسميتها G . G هي اتحاد مجموعة قابلة للعد من الفترات المفتوحة والتي لا تنتمي أطرافها إلى G كما برهنا سابقاً . أطراف الفترات هذه ، نقاط حدود (وكذلك نقاط نهاية) للمجموعة G ، وبما أن G مغلقة فإن هذه النقاط تنتمي إلى G . هذا التناقض يثبت عدم وجود المجموعة G .

لنثبت أن R_2 مترابط يكفي أن نثبت عدم وجود مجموعة مفتوحة ومغلقة غير المجموعة الخالية والفضاء كله . لنفرض أن E مثل هذه المجموعة ، لتكن $p \in E$ و $q \in C(E)$. خذ المستقيم المار في q, p واعتبره فضاء L حيث المسافة بين نقطتين في L تساوي المسافة بينهما في R_2 . إذاً L صورة مطابقة لـ R_1 . المجموعتان $E \cap L$ و $C(E) \cap L$ كلاهما مفتوحة ومغلقة في L وغير خالية (حيث إن واحدة تحتوي p والأخرى q) . هذا يناقض ترابط R_1 .

تمرين (٢٤-٥)

برهن أن كل مجموعة غير خالية في R_2 ما عدا R_2 نفسها لها نقاط حدود .

تمرين (٢٥-٥)

مجموعة إغلاق E تساوي اتحاد E ومجموعة نقاط النهاية لـ E . اثبت أنها أيضاً اتحاد E مع مجموعة نقاط حدود E وأنها مغلقة .

تمرين (٢٦-٥)

ما هو إغلاق المجموعات المذكورة في تمرين (٢٢-٥)؟

تمرين (٢٧-٥)

جوار النقطة x يتكون من النقاط y بحيث $d(x, y) < r$. برهن أن إغلاق هذا الجوار يتكون من النقاط y حيث $d(x, y) \leq r$ في الفضاء R_1 أو R_2 . هل هذا صحيح في كل فضاء متري؟

هناك حقيقة هامة بخصوص المجموعات المغلقة وهي أن اتحاد مجموعتين مغلفتين يبقى مغلقاً وكذلك تقاطع مجموعتين مغلفتين يبقى مغلقاً. حيث إن المجموعة المغلقة تحتوي على جميع نقاط حدودها والعكس صحيح فلكي نبرهن الجملة الأولى نأخذ مجموعتين مغلفتين E_1 و E_2 وأي نقطة نهاية p للمجموعة $E_1 \cup E_2$ ؛ علينا أن نثبت أن $p \in E_1 \cup E_2$. من التمرين (٥-٢٠) كل جوار للنقطة p يحتوي على عدد لانهائي من نقاط $E_1 \cup E_2$ غير النقطة p ، إذن إما عدد لانهائي من نقاط E_1 (غير p) أو عدد لانهائي من نقاط E_2 (غير p). هذا يعني أن p نقطة نهاية لواحدة على الأقل من E_1 أو E_2 . بما أن E_1 و E_2 مغلفتان إذن $p \in E_1$ إذا كانت p نقطة نهاية لـ E_1 و $p \in E_2$ إذا كانت p نقطة نهاية لـ E_2 . إذن p تنتمي على الأقل إلى واحدة من E_1 أو E_2 ، أي $p \in E_1 \cup E_2$. إذن $E_1 \cup E_2$ يحتوي على جميع نقاط نهاياته وإذن فهو مغلق.

الآن نبرهن أن تقاطع مجموعتين مغلفتين مغلق، خذ نقطة نهاية q للمجموعه $E_1 \cap E_2$. كل جوار لـ q يحتوي نقاطاً غير q ، تنتمي إلى E_1 وإلى E_2 . هذا يعني أن q نقطة نهاية لـ E_1 ونقطة نهاية لـ E_2 . بما أن E_1 و E_2 مجموعتان مغلفتان إذاً q ينتمي إلى كل من المجموعتين، $q \in E_1 \cap E_2$. إذاً $E_1 \cap E_2$ يضم جميع نقاط نهاياته وهو مغلق.

تمرين (٥-٢٨)

اثبت عن طريق الاستقراء أن اتحاد عدد منته من المجموعات المغلقة، مغلق وأن تقاطع أي عدد منته من المجموعات المغلقة مغلق.

تمرين (٥-٢٩)

اثبت أن تقاطع أي عدد (منته أو غير منته) من المجموعات المغلقة، مغلق.

تمرين (٣٠-٥)

اعط مثالا يدل على أن اتحاد عدد لانتهائي من المجموعات المغلقة والقابلة للعد قد لا يكون مغلقاً.

تمرين (٣١-٥)

اثبت أن اتحاد أي عدد من المجموعات المغلقة يكون مفتوحاً، وأن تقاطع عدد نهائي من المجموعات المفتوحة يكون مفتوحاً، وأن تقاطع مجموعة لانتهائية قابلة للعد من المجموعات المفتوحة قد لا تكون مفتوحة.

تمرين (٣٢-٥)

افرض أن N_1 جوار لـ x بحيث $d(x, y) < r$ ، وكذلك N_2 جوار للنقطة نفسها بحيث $d(x, y) < r/2$ ، اثبت أن إغلاق N_2 مجموعة جزئية من N_1 . هل من الضروري أن تكون مجموعة جزئية فعلية؟

نقول إن مجموعة E تامة (Perfect) إذا كانت خالية أو كانت مغلقة وجميع نقاطها نقاط نهاية لها. الفترة المغلقة في R_1 تامة، وكذلك اتحاد أي عدد نهائي من الفترات المغلقة. في الجزء التالي سنري أمثلة على مجموعات تامة أخرى.

٦ - المجموعات الكثيفة والمخلخلة

المجموعة E كثيفة في كل مكان (Everywhere dense) أو باختصار كثيفة، (Dense) إذا كان إغلاقها هو الفضاء كله. إذاً E كثيفة إذا كانت جميع نقاط الفضاء، نقاط نهاية للمجموعة E . نقول إن مجموعة مخلخلة (Nowhere dense) إذا كان إغلاقها لا يحوي أي جوار. بمعنى آخر، E مخلخلة إذا كانت خالية أو إذا كان كل جوار في الفضاء يحتوي على جوار جزئي منفصل عن E . النقاط القياسية في R_1 تكون مجموعة كثيفة. المجموعة المكونة من عدد نهائي من النقاط في R_1 ، لا بد أن تكون مخلخلة. سوف نتعرف فيما بعد على مجموعات مخلخلة أكثر تعقيداً.

لاحظ أن «التخلخل» ليس نقيض «الكثافة في كل مكان». المجموعة غير

الكثيفة في كل مكان تحقق الخاصية أن إغلاقها لا يملأ جواراً ما (قد يكون صغيراً). إذا كانت المجموعة غير مغلقة فإن إغلاقها لا بد أن يملأ جواراً ما ولكن ليس الفضاء كله بالضرورة. نقول أحياناً إن المجموعة E كثيفة في فترة معينة، أو في مجموعة أخرى، أو أنها مغلقة في فترة. هذه العبارات تفسر نفسها.

تمرين (٦-١)

خذ الفضاء Ω الذى عناصره الأعداد $1, 2, 3, \dots$ في R_1 وبمسافة R_1 . صف الجوارات في Ω . هل المجموعة المكونة من العنصر 1 ، مجموعة مغلقة في Ω ؟

تمرين (٦-٢)

إذا كانت مجموعة مغلقة لا تحوى أى جوار فإنها مغلقة. بما أن كل نقطة من مجموعة تامة هي في الواقع نقطة نهاية للمجموعة، فإننا نتوقع أن أى مجموعة تامة غير خالية لا بد وأن تحوى عدداً كبيراً جداً من النقاط. على هذا الأساس، نستغرب وجود مجموعة غير خالية مغلقة وتامة في آن واحد.

تمرين (٦-٣)

المجموعة R_1 في الفضاء R_2 مغلقة تامة. لا يوجد في R_1 مجموعات مغلقة وتامة بهذه البساطة. مجموعة كانتور (Cantor set) تعطي مثلاً على مجموعة مغلقة تامة في R_1 ويمكن استخدامها لإنشاء العديد من المجموعات والدوال بخواص غريبة. يمكن إنشاء مجموعة كانتور كالتالي: خذ الفترة المغلقة $[0, 1]$ في R_1 . احذف الثلث الأوسط المفتوح أى الفترة $(1/3, 2/3)$. بعد ذلك، احذف الأثلث الوسطى المفتوحة من الفترتين الباقيتين، أى احذف $(1/9, 2/9)$ و $(7/9, 8/9)$ ثم احذف الأثلث الوسطى المفتوحة من الفترات الأربع الباقية وهكذا نستمر. كما في شكل (٢).



شكل (٢)

ماذا يبقى من الفترة $[0, 1]$ ؟ في البداية، نلاحظ أن ما حذف هو اتحاد مجموعات مفتوحة (في الحقيقة فترات مفتوحة) ولذا فهو مفتوح، الباقي هو المكمل (بالنسبة إلى $[0, 1]$) وهو مجموعة مغلقة. أطراف الأثلاث المتوسطة لم تحذف، وبما أن المجموعة المتبقية مغلقة فإن كل نقطة نهاية لنقاط الأطراف لا بد وأن تبقى. فمثلاً، إذا بدأنا من $1/3$ وأخذنا أقرب نقطة طرف من الخطوة الثانية ($1/3 - 1/9 = 2/9$)، ثم أقرب نقطة طرف من الخطوة الثالثة ($1/3 - 1/9 + 1/27$)، الخ، نقطة النهاية الوحيدة لهذه المجموعة هي $1/4 = 1/3 - 1/9 + 1/27 - \dots$. إذاً يوجد نقاط نهايات للأطراف ليست أطرافاً في حد ذاتها. مجموعة كانتور هي المجموعة المتبقية بعد حذف جميع الأثلاث الوسطي: إنها تتكون من جميع الأطراف ونقاط نهاياتها.

لقد لاحظنا أن مجموعة كانتور مغلقة. المجموعة لا تحوي أي فترة، لأن مجموع أطوال الفترات المحذوفة يساوي $1 = 1/3 + 2/9 + 4/27 + \dots$. إذاً فمجموعة كانتور مغلقة (تمرين ٦-٢). لنثبت أن المجموعة تامة ماعلياً إلا إثبات أن كل نقطة منها نقطة نهاية. بما أن نقاط نهايات الأطراف هي نقاط نهايات للمجموعة بالطبع، يتبقى علينا التأكد من أن الأطراف نقاط نهاية. خذ على سبيل المثال، النقطة $1/3$. إلى يسارها يوجد فترة طولها $1/3$ والتي حذفنا منها الثلث الأوسط ويبقى فترة طولها $1/9$ مجاورة للنقطة $1/3$ ، ثم نحذف الفترة $(1/9, 2/9)$ ويبقى فترة طولها $1/27$ مجاورة للنقطة $1/3$ ، وهلم جرا. في أي جوار للنقطة $1/3$ سنجد فترة قصيرة لم تحذف عند خطوة معينة وهذه الفترة سوف تشمل طرف ينتمي إلى الخطوة التالية. إذاً $1/3$ نقطة نهاية لنقاط الأطراف. يمكن تطبيق هذه المناقشة على أي نقطة طرف أخرى.

هناك إنشاء حسابي لمجموعة كانتور سنستفيد منه في المستقبل. سوف نستعمل نشر الأعداد الحقيقية في النظامين الثنائي والثلاثي بدلاً من النظام العشري. فمثلاً،

(نظام ثنائي) $0.10010110 \dots$

تعني

$$\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \dots$$

بينما

(نظام ثلاثي) ... 0.10010110

تعني

$$\frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{0}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^7} + \frac{0}{3^8} + \dots$$

(في النظام الثنائي ، لدينا الأرقام 0, 1 فقط ، أما في النظام الثلاثي فلدينا الأرقام 0, 1, 2) . إذاً ... 0.020202 (في النظام الثلاثي) = $\frac{1}{4}$. (نستعمل نفس المحاكمة عندما نجمع عدداً عشرياً متكرراً في النظام العشري : إذا كانت $x = 0.0202 \dots$ فإن $9x = 2.0202 \dots = 2 + x$) لاحظ أن هذا ليس مفكوك $\frac{1}{4}$ الذي استعملناه لإثبات أن $\frac{1}{4}$ تنتمي إلى مجموعة كانتور ولكنه يكافئه لأن

$$\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \dots = \frac{3}{3^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{3}{3^4} - \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots$$

الآن دعونا نكتب جميع الأعداد بين 0, 1 في النظام الثلاثي . الأعداد التي رقمها الأول 1 تقع بين $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ ، إذاً هذه الأعداد تملأ الفترة الأولى والتي حذفنا داخلها عند إنشاء مجموعة كانتور . الأعداد التي تبدأ بالرقم 0 ، تملأ الفترة $0, \frac{1}{3}$ والمجموعة التي رقمها 1 تقع بين $\frac{1}{9}$ و $\frac{2}{9}$ ، أي تملأ أحد الفترات التي حذفنا داخلها في الخطوة الثانية من إنشاء مجموعة كانتور . كل عدد استبعد حتي الآن ، ظهر الرقم 1 في الخانة الأولى أو الثانية من مفكوكه في النظام الثلاثي ، وهذا صحيح أيضاً بالنسبة لنقاط الأطراف ولكن هذه الأخيرة لها مفكوكات لا تحتوي على الرقم 1 فمثلاً $\frac{1}{3} = 0.1000 \dots = 0.0222 \dots$ ، وكذلك $\frac{2}{3} = 0.2000 \dots = 0.1222 \dots$. من هذا نجد أن مجموعة كانتور تتكون فقط من الأعداد التي لها مفكوك في النظام الثلاثي لا يحوي الرقم 1 . نقاط الأطراف هي الأعداد التي ينتهي مفكوكها في النظام الثلاثي

بأصفار أو بالرقم 2 (وهي طبعاً متكافئة مثل تكافؤ $0.1000 \dots$ و $0.0999 \dots$ في النظام العشري).

تمرين (٦-٤)

برهن أن مجموعة كانتور غير قابلة للعد.

في الحقيقة نستطيع أن نقول أكثر من ذلك: من الممكن إيجاد تناظر أحادي بين مجموعة كانتور ومجموعة الأعداد الحقيقية بين 0, 1. تذكر أن نقاط مجموعة كانتور تتألف من الأعداد التي يمكن كتابة مفكوكها في النظام الثلاثي باستخدام الأرقام 0, 2 فقط. ارفق مع كل من هذه الأعداد x ، عدداً جديداً نحصل عليه من تنصيف كل خانة في المفكوك الثلاثي لـ x ومن ثم تفسير النتيجة في النظام الثنائي. بهذه الطريقة، نحصل على كل عدد بين 0, 1 من نقطة ما في مجموعة كانتور، ونقاط أطراف الفترات المحذوفة تعطي مفكوكين لنفس العدد، فمثلاً $1/3 = 0.022 \dots$ في النظام الثلاثي و $2/3 = 0.200 \dots$ في النظام الثلاثي وكل منها تعطي العدد $1/2 = 0.0111 \dots = 0.1000 \dots$ في النظام الثنائي. إذاً التناظر أحادي بين مجموعة كانتور ناقص المجموعة القابلة للعد من أطراف الفترات المحذوفة ومجموعة الأعداد الحقيقية ناقص المجموعة القابلة للعد من الأعداد التي لها مفكوكان في النظام الثنائي. إذا جعلنا هذه المجموعات القابلة للعد في تناظر أحادي فإننا نحصل على تناظر أحادي بين مجموعة كانتور والأعداد الحقيقية بين 0, 1.

نقول إن فضاء متري قابل للفصل (Separable) إذا احتوى على مجموعة قابلة للعد وكثيفة في كل مكان. فمثلاً، R_1 قابل للفصل لأن الأعداد القياسية تمثل مجموعة كثيفة وقابلة للعد.

تمرين (٦-٥)

برهن أن R_2 قابل للفصل.

الفضاء C_0 (المتتاليات التي تؤول إلى الصفر) قابل للفصل. نستطيع الحصول على مجموعة قابلة للعد وكثيفة إذا أخذنا جميع المتتاليات من الأعداد القياسية والتي

جميع إحداثياتها أصفار ما عدا عدد نهائي (مثل $\{1, 0, 0, \dots\}$ أو $\{2/3, -5/2, 3/4, 0, 0, \dots\}$). هذه المجموعة قابلة للعد لأن المجموعة المكونة من المجموعات النهائية من الأعداد القياسية قابلة للعد. الآن نثبت أنها كثيفة في C_0 ، تذكر أن المسافة بين نقطتين $x = (x_1, x_2, \dots)$ و $r = (r_1, r_2, \dots)$ في الفضاء C_0 تساوي $\sup |x_k - r_k|$. لتكن x أي نقطة في C_0 . نريد اختيار نقطة r حيث جميع r_k قياسية وجميعها أصفاراً ما عدا عدد نهائي، بحيث تكون $\sup |x_k - r_k|$ صغيرة. لتكن ϵ كمية موجبة اختيارية لقياس درجة الصغر المطلوبة نختار N كبيرة لدرجة أن $\epsilon < |x_n|$ لجميع $n > N$. اجعل r_1, r_2, \dots, r_N أعداداً قياسية بحيث $\epsilon > |x_n - r_n|$ لكل $n = 1, 2, \dots, N$. إذاً $r = (r_1, r_2, \dots, r_N, 0, 0, \dots)$ هي النقطة المطلوبة.

سنثبت فيما بعد أن مجموعة كثيرات الحدود كثيفة في فضاء الدوال المتصلة C .

تمرين (٦-٦)

برهن أن مجموعة كثيرات الحدود غير قابلة للعد.

تمرين (٦-٧)

برهن أن مجموعة كثيرات الحدود لعوامل قياسية، قابلة للعد.

تمرين (٦-٨)

برهن أنه إذا كانت مجموعة كثيرات الحدود كثيفة في C ، فإن مجموعة كثيرات الحدود بعوامل قياسية كثيفة أيضاً. استنتج أن C قابل للفصل. وكمثال على فضاء غير قابل للفصل نذكر الفضاء m المكون من متتاليات محدودة من الأعداد الحقيقية. يمكننا التأكد من ذلك كما يلي.

تمرين (٦-٩)

اثبت وجود مجموعة S في m غير قابلة للعد وعناصرها مكونة من الأرقام $0, 1$ فقط.

تمرين (٦-١٠)

ماهي المسافة في m بين أي نقطتين من المجموعة S المذكورة في التمرين السابق؟
 لتكن E مجموعة كثيفة في كل مكان من الفضاء m . سوف نضع المجموعة S (الموضحة في التمرين ٦-٩) في تناظر أحادي مع المجموعة E . هذا سوف يثبت أن E تحتوي على مجموعة غير قابلة للعد وهذا يعني أن E غير قابلة للعد. إذاً m لا تحتوي على مجموعة كثيفة قابلة للعد. لكي نوجد تناظراً أحادياً بين S ومجموعة جزئية من E ، نأخذ أي نقطة p من S . يوجد نقطة q من E تبعد عن p بأقل من $1/2$ ، لأن E كثيفة في كل مكان. المسافة بين q وأي نقطة أخرى s في S أكبر من $1/2$ ، لأن $1 = d(p, s) \leq d(p, q) + d(q, s) < 1/2 + d(q, s)$. بهذه الطريقة، نربط نقطة مختلفة من E مع كل نقطة من S ، وهذا يعني أن عدد نقاط E يساوي عدد نقاط S على الأقل، أي أن E غير قابل للعد.

تمرين (٦-١١)

برهن بطريقة مشابهة أن الفضاء B (راجع الجزء ٤) غير قابل للفص.

٧ - التراص (Compactness)

كثيراً ما نحتاج إلى القول بأن مجموعة ما، لها نقطة نهاية ولو لم نستطع إيجاد هذه النقطة بالفعل. لنفرض أننا نحاول إثبات أن الدالة f الحقيقية المتصلة والمحدودة والمعرفة على مجموعة E من R_1 لا بد وأن تأخذ قيمتها العظمى. بمعنى آخر، نريد أن نثبت وجود نقطة x في E بحيث تكون $f(x)$ مساوية لأصغر حد أعلى للأعداد $f(y)$ حيث y في E . (نفترض هنا أن القارئ لديه فكرة عامة عن الدوال المتصلة، التعريف سيعطي في الجزء ١٣). إننا الآن نحاول إثبات وجود x في E بحيث $f(x) \geq f(y)$ لكل y في E .

لقد فرضنا أن f محدودة، أي القيم $f(y)$ حيث y في E تكون مجموعة محدودة من الأعداد الحقيقية. هذه المجموعة لها أصغر حد أعلى M ، إذاً $f(y) \leq M$ لكل y في E . لا بد إذاً من وجود نقاط x_n في E بحيث $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$ وإلاً وجدنا حداً

أعلى أصغر من M . كذلك يمكننا أن نفرض للسبب نفسه أن جميع x_n مختلفة إذا كانت E مجموعة غير منتهية (إذا كانت E منتهية فلا يوجد ما نثبتته) . إذا كانت x في E نقطة نهاية للنقاط x_n فإن $f(x) \geq M$ لأن $f(x_n) \geq M - \frac{1}{n}$. بما أن $f(x) \leq M$ حسب تعريف M . إذاً $f(x) = M$.

الآن متى نستطيع القول بوجود نقطة نهاية في E لمجموعة $\{x_n\}$ مكونة من عدد لانهائي من نقاط E ؟ هذا ليس صحيحاً دائماً: فمثلاً في R_1 ، المجموعة $E_1 = \{1/2, 1/4, 1/8, \dots\}$ لها نقطة نهاية 0 ، ولكن هذه النقطة ليست في E_1 . أيضاً $E_2 = \{1, 2, 3, \dots\}$ ليس لها نقطة نهاية في R_1 على الإطلاق . نظرية بولزانو فيرشتراس (Bolzano-Weierstrass theorem) تزودنا بشروط بسيطة تضمن أن مجموعة ما، تحوي نقطة نهاية . النظرية تنص على أن أي مجموعة لانهائية ومحدودة في R_1 ، لها نقطة نهاية في R_1 ؛ إذاً كانت المجموعة مغلقة أيضاً فإنها تحتوي على نقطة نهاية . إذا افترضنا صحة هذه النظرية فإننا نرى أن أي دالة حقيقية متصلة ومحدودة تأخذ قيمتها العظمى على أي مجموعة محدودة ومغلقة في R_1 . الأمثلة $f(x) = x$ حيث $E = R_1$ ، و $f(x) = \frac{1}{x}$ حيث $E = (0, \infty)$ تدل على أن المجموعة لا بد أن تكون مغلقة ومحدودة في نفس الوقت . (سنرى الآن أن شرطنا بخصوص محدودية الدالة لا لزوم له ، حيث إنه يلزم من الفرضيات الأخرى) .

تمرين (٧-١)

استنتج الجملة السابقة من نظرية بولزانو - فيرشتراس .

الآن نبرهن نظرية بولزانو - فيرشتراس بطريقة اقترحت لصيد أسد في الصحراء الكبرى . نحيط الصحراء بسور، ثم نقسم الصحراء بسور من الشمال إلى الجنوب . الأسد موجود في أحد هذين النصفين ، نقسم هذا النصف بسور من الشرق إلى الغرب . الأسد الآن في أحد الربعين ، نقسم هذا الربع بسور . . . وهلم جرا: في النهاية نحضر الأسد في منطقته صغيرة .

النقطة الأساسية في تطبيق هذه الفكرة على المسألة التي لدينا هي إذا كانت E مجموعة لانهائية وتقع داخل فترة نهائية I ، فإن أحد أنصاف I على الأقل يحوي عدداً

لانهائيا من النقاط . ليكن I_2 أحد أنصاف I التي تحوي عدداً لانهائيا من نقاط E .
نقسم I_2 وأحد أنصافها يحوي عدداً لانهائيا من نقاط E ، نسميه I_3 . نكرر هذه
العملية وسوف نحصل على متتالية من الفترات المتداخلة I_2, I_3, \dots كل منها يحوي
عدداً لانهائيا من نقاط E . الأطراف اليسرى للفترات I_n تكون مجموعة من
النقاط محدودة من أعلى (لأنها في I) ولذا فلها أصغر حد أعلى x . كل جوار
لنقطة x يحتوي على فترة I_n لأن طول I_n يؤول الى الصفر ولذا فهو يحوي عدداً
لانهائيا من نقاط E . إذاً x نقطه نهايه للمجموعة E .

تمرين (٧-٢)

برهن نظرية بولزانو - فيرشتراس في R_2 .

كتطبيق لنظرية بولزانو - فيرشتراس وعدم قابلية الأعداد الحقيقية للعد،
سوف نبرهن نظرية حول تقريب دالة بواسطة المجاميع الجزئية لسلسلة قواها
(power series) . لتكن $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ حيث المتوالية تتقارب في $|x| < 1$. افرض أن
 $f(x)$ تتطابق مع مجموع جزئي لسلسلة القوى لكل نقطة x من $(0, 1)$ ، بمعنى أن لكل
 x ، يوجد n بحيث

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = 0 \quad \text{إذن } f \text{ كثيرة حدود. (٣)}$$

اجعل E_n مجموعة للنقاط في $[0, 1/2]$ بحيث $\sum_{k=0}^n a_k x^k = f(x)$. لاحظ أن
الأرقام n قابلة للعد بينما النقاط في $[0, 1/2]$ غير قابلة للعد، من هذا نستنتج أن أحد
المجموعات E_n غير قابلة للعد ولذا فهي غير نهائية . إذن E_n لها نقطة نهاية في $[0, 1/2]$
والدالة f تتطابق مع كثيرة حدود على E_n . ولكن الدالة التحليلية لا يمكن أن تتطابق
مع كثيرة حدود على مجموعة لها نقطة نهاية داخل فترة التقارب بدون أن تكون هي
نفسها كثيرة حدود .

الجملة القائلة بأن كل مجموعة محدودة وغير منتهية لها نقطة نهاية جملة لها
معنى في كل فضاء مترى إلا أنها قد لا تكون صحيحة . فمثلا الجملة غير صحيحة
في الفضاء المكون من النقاط القياسية في R_1 بمسافة R_1 . نرى هذا بسهولة إذا أخذنا

المجموعة المكونة من التقريبات القياسية $\sqrt{2}$ to $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots$. هذه المجموعة محدودة ومغلقة (حيث إن $\sqrt{2}$ لا ينتمي للفضاء)، ولكن المجموعة لا تحوى نقطة نهاية. نظرية بولزانو - فيرشتراس تحقق هذا لأن نقاط الفضاء قليلة. ويمكن أن تحقق النظرية بسبب كثرة النقاط أيضاً. فمثلاً، خذ الفضاء B الذى نقاطه دوال محدودة على $[0, 1]$. لقد رأينا كيف يمكن إنشاء عدد لانهاى من هذه الدوال تبعد كل منها الوحدة عن الأخرى، هذه المجموعة في B لا يمكن أن تحتوى على نقطة نهاية.

إذا كانت كل مجموعة جزئية لانهاية في E تحوى نقطة نهاية في E فإننا نقول إن E متراسة، لقد رأينا أن المجموعات المغلقة والمحدودة في R_1 أو R_2 تتمتع بهذه الخاصية. ولكن كلمة متراس تطلق الآن على مجموعات تتمتع بخاصية أكثر شمولاً. نقول إن مجموعة متراسة إذا أمكن الحصول على غطاء نهائى من أى مجموعة من المجموعات المفتوحة التي تغطي المجموعة (نقول إن E مغطاة من قبل مجموعة المجموعات $\{G\}$ إذا كانت كل نقطة من E تقع في مجموعة واحدة من G على الأقل). لكي نرى كيف يمكن استخدام خاصية التراس، سوف نستعملها لإثبات أن الدالة الحقيقية المتصلة f والمعرفة على مجموعة متراسة E في فضاء متري تأخذ قيمتها العظمى على E . في البداية نثبت أن الدالة محدودة. نعين لكل نقطة x في E ، جواراً N مركزه x بحيث $f(y) < f(x) + 1$ لكل y في N . هذا ممكن لأن f متصلة وقيمتها لا تتغير كثيراً إذا كان تغير x صغيراً. هذه الجوارات مجموعات مفتوحة وكل x في واحد منها، وحيث إن E متراسة يوجد عدد نهائى من هذه الجوارات تغطي E . لتكن هذه N_1, N_2, \dots, N_n . إذا كانت x_k مركز N_k فإن $f(x)$ لا تتعدى القيمة العظمى للمجموعة المنتهية من الأعداد $f(x_k) + 1$ إذن f محدودة من أعلى. بنفس الطريقة، f محدودة من أسفل.

الآن نفرض أن f لا تأخذ قيمتها العظمى على E ونستخلص تناقضاً من ذلك. لقد رأينا أن القيم $f(x)$ حيث x في E تكون مجموعة محدودة، إذن المجموعة لها أصغر حد أعلى M ، ونحن نفرض أن f لا تأخذ هذه القيمة. لكل x نعين الجوار N بحيث $f(y) < f(x) + \frac{1}{2}(M - f(x))$ لكل y في N . يوجد عدد نهائى من هذه الجوارات

N_1, N_2, \dots, N_n التي تغطي E . اجعل M' (أصغر من M) أكبر قيم $f(x_k)$ حيث x_k مركز N_k . إذن إذا كانت y في E و x_k تنتمي إلى N_k التي تنتمي إليها y فإن:

$$f(y) \leq f(x_k) + \frac{1}{2}(M - f(x_k)) = \frac{1}{2}f(x_k) + \frac{1}{2}M < \frac{1}{2}(M' + M).$$

إذن القيم $f(y)$ حيث y في E لها الحد الأعلى $\frac{1}{2}(M' + M)$ وهذا أقل من M ، الأمر الذي يناقض كون M أصغر حد أعلي للدالة f .

تمرين (٧-٣)

إذا كانت E مجموعة في R_1 ومغطاة بعدد نهائي من الفترات المفتوحة، فإنه بإمكاننا تخفيض عدد الفترات بحيث لا تنتمي أي من نقاط E إلى أكثر من فترتين وهذه الفترات المخفضة تغطي E أيضاً.

تمرين (٧-٤)

برهن أن المجموعة المغلقة من مجموعة متراسة تكون متراسة. البرهان السابق يوحى بأهمية التعرف على المجموعات المتراسة. هذا سهل في R_1 : نظرية هاين - بوريل (Heine-Borel theorem) تنص على أن المجموعة في R_1 متراسة إذا كانت مغلقة ومحدودة. البرهان شبيه ببرهان نظرية بولزانو - فيرستراس. نفرض أن نظرية هاين بوريل غير صحيحة. إذن يوجد مجموعة E مغلقة ومحدودة ومجموعة من المجموعات المفتوحة $\{G\}$ التي تغطي E ولا يوجد أي عدد نهائي من هذه المجموعات يغطي E . المجموعة E تقع داخل فترة نهائية I ؛ نصف I . جزء E الواقع في أحد نصفي I لا يمكن تغطيته بمجموعة نهائية من G ، حيث إذا أمكن تغطية جزئي E أمكن تغطية E كلها. لنسم هذا النصف من I ، I_2 . الآن نصف I_2 وكرر العملية. مثل ما وجدنا مع نظرية بولزانو - فيرستراس، كل جوار للنقطة x يحوي فترة I_n والتي تحوي بدورها جزءاً من E لا يمكن تغطيته بواسطة مجموعة نهائية من المجموعات G (ولذا فهو لانهائي). النقطة x في E حيث E مغلقة ولذا فهي مغطاة بأحد المجموعات G . بما أن G مفتوحة فإنها تحوي جواراً لـ x وهذا الجوار

يحتوي فترة I_n إذا كانت n كبيرة بصورة كافية. جزء E في الواقع I_n هذه، مغطى بعدد نهائي (أي واحد) من المجموعات G . وهذا تناقض يثبت صحة نظرية هاين - بوريل.

تمرين (٥-٧)

برهن نظرية هاين - بوريل في R_2 .

قد يلاحظ القارئ تشابه الشروط على المجموعة في كل من نظرية هاين - بوريل ونظرية بولزانو - فيرشتراس. تشابه كل من الشروط والبراهين يوحي بوجود علاقه وثيقة بين النظريتين. في الحقيقة، إذا كانت إحداهما صحيحة في فضاء ميري فالأخرى صحيحة، ولكننا لن نبرهن هذه الحقيقة. (٤)

تمرين (٦-٧)

اثبت مباشرة أن نظرية هاين - بوريل غير صحيحة للمثالين (١-٧)، (٢-٧) حيث تتحقق نظرية بولزانو - فيرشتراس.

تمرين (٧-٧)

في الفضاء R_1 ، خذ الفترة E المكونة من $[0, 1]$. اربط كل x بالفترة المفتوحة $(\frac{1}{2}x, 2x)$. هذه الفترات تعطي E . برهن عدم وجود غطاء نهائي للمجموعة E وشرح لماذا لا تناقض هذه الحقيقة نظرية هاين - بوريل.

تمرين (٨-٧)

المجموعة $[0, \infty)$ في R_1 مغطاة بواسطة الفترات المفتوحة $(n-1, n+1)$ حيث $n = 0, 1, 2, \dots$. لا يوجد عدد نهائي من هذه الفترات يغطي المجموعة. وضح لماذا لا يتعارض هذا مع نظرية هاين - بوريل.

تمرين (٩-٧)

المجموعة E في R_1 المكونة من الأعداد القياسية في $(0, 1)$ غير مغلقة. يمكن

تغطيتها بمجموعات مفتوحة على النحو التالي: نغطي النقطة x بفترة مفتوحة طولها $1/10$ مركزها x . يوجد غطاء نهائي لـ E من هذه الفترات المفتوحة. اشرح لماذا لا تناقص هذه الحقيقة نظرية بولزانو - فيرستراس.

تمرين (٧-١٠)

لتكن المجموعة E في R_1 هي الفترة المغلقة $[0, 1]$. غط كل من $x \neq 0$ في E بالفترة $[1/2x, 2x]$ وغط النقطة 0 بالفترة $[0, 0.1]$. هذه الفترات المغطية غير مفتوحة ولكن يوجد غطاء نهائي فيها لـ E . وضح لماذا لا يتعارض هذا مع نظرية هاين - بوريل.

تجدر الإشارة إلى أنه بالإضافة إلى كون كل مجموعة جزئية من R_1 أو R_2 متراسة إذا كانت محدودة ومغلقة فإن أي مجموعة متراسة لا بد أن تكون مغلقة ومحدودة.

لإثبات هذا، نفرض أن E مجموعة متراسة غير خالية في R_1 . هذه المجموعة لا يمكن أن تكون R_1 بكاملها، إذن مكملتها لا بد أن تحوي x . خذ جميع الفترات المنتهية المفتوحة G بحيث لا يحوي إغلاقها النقطة x . يوجد بين فترات G ، جوارات لكل نقطة من E لأنه إذا كانت $y \in E$ فالجوار حول y الذي يصل فقط إلى منتصف المسافة إلى x لن يحوي x في إغلاقه. إذن E مغطاة بالمجموعات المفتوحة G . وحيث إن E متراسة فإنه يوجد غطاء نهائي من G وليكن G_1, \dots, G_n . إذن E محدودة لأنها داخل اتحاد عدد نهائي من الفترات المنتهية. وبما أن إغلاقات G_1, G_2, \dots, G_n لا تحوي x فإن مكملات هذه الإغلاقات جميعاً تحوي النقطة x وعليه فإن x تقع في تقاطعها. إغلاقات المجموعات G_k مغلقة والمكملات مفتوحة وعليه فتقاطع المكملات مفتوح. إذن x تنتمي لمجموعة مفتوحة في $C(E)$ وحيث إن x نقطة اختيارية من $C(E)$ فإن كل نقطة من $C(E)$ تقع داخل مجموعة مفتوحة من $C(E)$. إذن $C(E)$ مفتوحة (تمرين ٥-١٥) وكذلك E مغلقة (تمرين ٥-١٨).

٨ - التقارب والكمال (Convergence and Completeness)

يعني جزء كبير من التحليل الرياضي بمتتاليات وسلاسل الدوال. ولكن مفهوم السلسلة اللانهائية العددية أبسط. فمثلاً نكتب $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ وهذا يعني

أننا نجمع الحدود واحداً تلو الآخر ونكون المجاميع الجزئية.

$$1/2, 1/2 + 1/4, 1/2 + 1/4 + 1/8, \dots$$

ونسمي نهاية هذه المتتالية (إن وجدت) مجموع السلسلة اللانهائية. (نفترض هنا أن القارئ ملئ بمبادئ مفهوم النهاية). في هذه الحالة، المجاميع هي $1/2, 3/4, 7/8, \dots$ ويتضح من هذا أن مجموع السلسلة هو 1. تكون المعالجة أوضح إذا استخدمنا قانون مجموع المتوالية الهندسية:

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - 1/2} = 1 - 2^{-n}.$$

بشكل عام، إذا كتبنا السلسلة اللانهائية

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

فإننا نحسب المجاميع الجزئية a_1 ثم $a_1 + a_2$ ثم $a_1 + a_2 + a_3$ ، وهلم جرا ونسمي نهاية هذه المتتالية من المجاميع (إن وجدت) مجموع السلسلة. لاحظ، مثلاً، أن $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ و $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$ سلسلتان مختلفتان لأن المجاميع الجزئية للأولى هي $1, 0, 1, 0, \dots$ بينما مجاميع الثانية جميعها تساوي صفر.

في الحقيقة أننا لم نعرف بعد «السلسلة اللانهائية»: لقد اقترحنا فقط طريقة لإعطاء قيمة عددية لكمية لم تكون معرفة من قبل. لكي نعطي تعريف نلاحظ أن ما استعملناه في الحقيقة ما هو إلا متتالية من المجاميع الجزئية. في الواقع أن المتتالية دالة من الأعداد الطبيعية الموجبة إلى فضاء ما: انظر الجزء ١٢. ولكن نستطيع أن نعتبر متتالية من الأعداد، مجموعة من الأعداد رقت بواسطة الأرقام الموجبة حسب ترتيبها، الأعداد قد لا تكون مختلفه فمثلاً $1, 0, 1, 0, \dots$ متتالية (حيث الترقيم مفهوم ضمناً)؛ وبشكل عام نكتب المتتالية على الشكل a_1, a_2, \dots أو $\{a_n\}$ أو بصورة أبسط $\{a_n\}$. يجب أن نفرق بين المتتالية وبين المجموعة المكونة من عناصرها. أي مجموعة لانهائية قابلة للعد يمكن ترتيبها في متتالية (بعدة طرق) ولكن المتتالية لا تحتاج إلى أكثر

من عدد نهائي من الأعداد المختلفة . (لاحظ أن «المتتالية المنتهية» مثل $\{5, 12, 13\}$ ليست متتالية حسب تعريفنا). الآن نعرف السلسلة اللانهائية $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ على أنها المتتالية التي عناصرها المجاميع الجزئية

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

وهلم جرا .

وبالعكس ، كل متتالية من الأعداد تعرف سلسلة لانهاية بحيث تكون الأعداد هي المجاميع الجزئية . فمثلاً ، المتتالية $1, 0, 1, 0, \dots$ هي متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. بشكل عام ، المتتالية s_1, s_2, s_3, \dots هي متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots$.

إن مفهوم المتتالية أعم من مفهوم السلسلة لأننا نستطيع الحصول على متتالية عناصرها مجموعات أو أي نقاط في أي فضاء ، ولكن لا يوجد سلسلة إلا إذا كانت عملية الجمع معرفة على نقاط الفضاء .

من الطبيعي أن نقول أن السلسلة اللانهائية متقاربة إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية متقاربة وإلا فإن السلسلة متباعدة . لكي نجعل هذا التعريف دقيقاً ، علينا أن نعرف ماذا يعني تقارب متتالية . إذا كانت $\{s_n\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية ، نقول إنها تؤول إلى النهاية L إذا أمكن جعل $|s_n - L|$ صغيراً حسب ما نريد لكل قيم n الكبيرة . عندئذ نكتب $s_n \rightarrow L$. بأسلوب أدق ، نكتب $s_n \rightarrow L$ إذا وجد رقم N لكل عدد حقيقي موجب ϵ (مهما كان صغيراً) بحيث $|s_n - L| < \epsilon$ عندما $n > N$. يمكن تعميم هذا التعريف بصورة مباشرة إلى متتاليات عناصرها نقاط في أي فضاء متري : ما علينا إلا أن نستبدل $|s_n - L|$ بالكمية $d(s_n, L)$. فمثلاً المتتالية $\left\{\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right), \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}$ في R_2 تؤول إلى $(1, 0)$ ؛ وكذلك إذا كانت العناصر x_n في الفضاء C معرفة كالتالي $x_n(t) = t^n(1 - t)^n$ حيث $0 \leq t \leq 1$ فإن المتتالية $\{x_n\}$ تؤول إلى العنصر 0 في C (حيث أن $t(1 - t) \leq 1/4$).

مع أن تعريف السلسلة $a_1 + a_2 + \dots$ على أنها متتالية المجاميع الجزئية $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ يبدو معقولاً إلا أن هناك تعاريف أخرى مفيدة أيضاً. فمثلاً أحياناً نعرف $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ بأنها المتتالية

$$\frac{s_1}{1}, \frac{s_1 + s_2}{2}, \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3}, \dots$$

$$\frac{s_1 + s_2}{2}, \frac{s_2 + s_3}{2}, \frac{s_3 + s_4}{2}, \dots$$

أو

بالإمكان البرهان على أن أيّاً من هذه التعاريف يحافظ على مجموع أي سلسلة متقاربة. ^(٥) كذلك هذه التعاريف قد تجعل بعض السلاسل المتباعدة، متقاربة؛ فمثلاً السلسلة المتباعدة $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ مجاميعها هي $s_1 = 1$ ، $s_2 = 0$ ، $s_3 = 1$

وهكذا، إذن أي من التعريفين يجعل السلسلة متقاربة بالمجموع $1/2$.

الآن نفحص بعض خواص متتاليات النقاط في قضاء متري؛ لقد مهد مفهوم السلسلة اللانهائية لمفهوم المتتالية، ولكننا لن نستعمل السلاسل اللانهائية في الوقت الحاضر.

إذا كانت متتالية تؤول إلى النهاية L فإن عناصرها تقترب من بعضها البعض وتبقى كذلك في آخر الأمر. لنجعل N كبيرة بحيث لكل $n > N$ نجد أن $d(s_n, L) < \frac{\epsilon}{2}$ ، لتكن $m > N$ ، إذاً $d(s_m, L) \leq \frac{\epsilon}{2}$ أيضاً. من المراجعة المثلثية نجد $d(s_m, s_n) \leq d(s_n, L) + d(s_m, L) < \epsilon$. أي يمكن جعل المسافة $d(s_m, s_n)$ صغيرة كما نشاء إذا أخذنا كلاً من m و n كبيرة بصورة كافية.

إذا كانت متتالية $\{s_n\}$ تحقق الخاصية أن عناصرها تقترب من بعضها وتبقى كذلك كما وضعنا قبل قليل فإنها تسمى متتالية كوشي (Cauchy Sequence) ونقول إنها متقاربة. هذه المتتالية قد تؤول أو لا تؤول إلى نهاية في الفضاء. فمثلاً، في الفضاء المتري المكون من الأعداد النسبية بمسافة R_1 ، المتتالية

$$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots\}$$

والمؤلفة من التقريبات العشرية للعدد $\sqrt{2}$ متقاربة. في الحقيقة، إذا كانت $m > N$ و $n > N$ فإن s_n, s_m تتطابق على الأقل إلى الخانة العشرية N ولذا فإن $|s_m - s_n| < 10^{-N}$. ومع ذلك، المتتالية لا تؤول إلى نقطة في الفضاء.

الفضاء المترى الذي كل متتالية كوشي فيه تؤول إلى نقطة في الفضاء يسمى فضاء كامل (Complete). فضاء الأعداد النسبية غير كامل. لكن الفضاء R_1 كامل كما سنرى بعد قليل. في الحقيقة، نستطيع دائماً أن نجعل أي فضاء مترى كاملاً بإضافة نقاط جديدة إليه لنحصل على فضاء أكبر مثل ما ننشئ الأعداد الحقيقية من الأعداد النسبية. لن نناقش بناء الأعداد الحقيقية من النسبية هنا. ^(٦)

الآن نبرهن أن كمال الفضاء R_1 ينتج من خاصية أصغر حد أعلى التي افترضناها. اجعل $\{s_n\}$ متتالية كوشي. إذا كان ϵ عدداً حقيقياً موجباً اختيارياً فإنه يوجد رقم N بحيث إن $|s_m - s_n| < \epsilon$ إذا كان $n > N$ و $m > N$. في المقام الأول، القيم المختلفة s_n تكون مجموعة محدودة. لنري هذا، خذ $\epsilon = 1$ ، اوجد N المرافقة وخذ $m > N$. إذن $s_n = s_m + (s_n - s_m)$ ومنه نجد أن $|s_n| \leq |s_m| + 1$ إذا كانت $n > N$. بما أن المجموعة النهائية $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ محدودة فإن المجموعة المكونة من الأعداد s_n محدودة أيضاً.

اجعل L_k أصغر حد أعلى للمجموعة المكونة من جميع القيم s_n حيث $n > k$. إذا جعلنا k كبيرة فإننا نأخذ أصغر حد أعلى لمجموعة أصغر من الأعداد. إذن $L_k \geq L_{k+1} \geq \dots$. اجعل L أكبر حد أدنى للمجموعة المكونة من جميع L_k . سنثبت أن $s_n \rightarrow L$. خذ ϵ أي عدد موجب وخذ N المرافقة له بحيث $|s_m - s_n| < \epsilon$ إذا كانت $n > N$. من تعريف أكبر حد أدنى، يوجد L_k حيث $k > N$ ، بين L و $L + \epsilon$. بما أن L_k أصغر حد أعلى للمجموعة المكونة من s_n حيث $n > k$ ، فإنه يوجد s_m (حيث $m > k$) بين $L_k - \epsilon$ و L_k ؛ إذاً $L - \epsilon \leq s_m \leq L + \epsilon$. بما أن s_n تبعد عن s_m بمسافة ϵ على الأكثر فإن $L - 2\epsilon \leq s_n \leq L + 2\epsilon$. بما أن 2ϵ اختياري مثل ϵ فهذا يعني أن بالإمكان

جعل s_n قريباً بصورة اختيارية من L إذا جعلنا n كبيرة بصورة كافية، إذاً
 $s_n \rightarrow L$.

تمرين (٨-١)

برهن أنه بالإمكان استنتاج خاصية أصغر حد أعلى من كمال الفضاء R_1 .

تمرين (٨-٢)

إذا كانت $\{s_n\}$ متتالية من نقاط R_1 بحيث إن $s_n \leq s_{n+1}$ ، و $s_n \leq M$ لكل n فإن $\{s_n\}$ متقاربة. بمعنى آخر، المتتالية المتزايدة والمحدودة لها نهاية (هذه تؤخذ أحيانا كالصيغة الأساسية للكمال في R_1).

تمرين (٨-٣)

برهن أن R_2 كامل.

سوف نرى في الجزء (١٧) أن الفضاء C كامل، وبشكل عام، فضاء الدوال المتصلة على أي مجموعة متراسة، كامل. لقد لاحظنا في (تمرين ٤-٢) أن أي مجموعة جزئية من فضاء متري تكون فضاءاً مترياً (إذا استعملنا نفس المسافة).

تمرين (٨-٤)

المجموعة الجزئية من فضاء متري كامل قد لا تكون فضاءاً مترياً كاملاً. اعط مثال على هذا.

الآن نبرهن أن أي مجموعة جزئية E مغلقة وغير خالية في فضاء متري كامل S تكون فضاءاً مترياً كاملاً (كالعادة، نستعمل المسافة الأصلية). لتكن $\{x_k\}$ متتالية كوشي في E . هذه متتالية كوشي في الفضاء S أيضاً لأن المسافة في E و S واحدة. بما أن S كامل، إذاً $x_k \rightarrow x_0$ حيث $x_0 \in S$. ماعلينا الآن إلا أن نثبت أن

$x_0 \in E$. هناك حالتان يجب فحصهما . في الحالة الأولى ، جميع حدود المتتالية متطابقة ماعدا عدد نهائي . في هذه الحالة تتطابق الحدود مع x_0 ، أي أن $x_0 \in E$. في الحالة الثانية ، يوجد عدد لانهائي من الحدود المختلفة . إذاً $x_k \rightarrow x_0$ يعني أن x_0 نقطة نهاية للمجموعة المكونة من الحدود x_k ، أي أن x_0 نقطة نهاية للمجموعة E . بما أن E مغلقة ، إذن فهي تحوي نقاط نهاياتها . إذن $x_0 \in E$.

علينا أن نميز بين نهاية متتالية ونقطة نهاية للمجموعة المكونة من عناصر المتتالية المختلفة . فمثلاً ، المتتالية $\{0, 0, 0, \dots\}$ في R_1 لها النهاية 0 ، ولكن مجموعة عناصر المتتالية تتألف من نقطة واحدة ولذا فليس لها نقطة نهاية . على العكس من ذلك ، مجموعة عناصر المتتالية $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots\}$ في R_1 لها نقطتا نهاية $0, 1$ ولكن المتتالية ليس لها نهاية . ضرورة التمييز هو ما جعلنا نأخذ الحالتين في البرهان السابق .

ومع ذلك يوجد ترابط وثيق بين مفهوم نهاية متتالية ونقاط نهاية المجموعة المكونة من عناصر المتتالية .

تمرين (٥-٨)

لدينا متتالية تؤول إلى L وبها عدد لانهائي من الحدود المختلفة ، برهن أن مجموعة عناصر المتتالية لها نقطة نهاية وحيدة وهي L .

تمرين (٦-٨)

إذا كانت متتالية تؤول إلى نهاية وعناصرها تنتمي إلى مجموعة مغلقة ، برهن أن نهاية المتتالية تنتمي إلى المجموعة نفسها .

تمرين (٧-٨)

إذا كانت E مجموعة متراسة غير خالية في R_1 فإن فيها عنصر أكبر .
قد يبدو من تمرين (٥-٨) ، أنه إذا كانت متتالية متقاربة فإن نهايتها تصبح نقطة نهاية لمجموعة عناصر المتتالية . ومن ناحية أخرى ، نلاحظ أنه إذا كانت L نقطة

نهاية لمجموعة E فإنه يوجد متتالية من نقاط E تؤول إلى L . في الحقيقة يوجد نقطة x_1 في E على بعد أقل من 1 من L ؛ كذلك يوجد x_2 تبعد عن L بأقل من $1/2$ وهكذا. في أغلب الأحيان، تتألف E من عناصر متتالية، وإذا كان لهذه العناصر نقطة نهاية فلا بد من وجود متتالية جزئية تؤول إلى نقطة النهاية. هذا هو مبدأ المتتالية الجزئية (Subsequence principle) وله استعمالات كثيرة.

تمرين (٨-٨)

لتكن E متتالية محدودة في R_2 ، برهن أن E تحوي متتالية جزئية متقاربة واحدة على الأقل (هذا نظير نظرية بولزانو - فيرستراس للمتتاليات).
الآن نعطي مثالا على استعمال مبدأ المتتالية الجزئية. سوف نناقش مفهوم قطر مجموعة E . القطر (Diameter) هو أصغر حد أعلى للمسافات بين نقاط E ؛ ونكتب $\text{diam } E = \sup d(x, y)$ حيث x, y في E . فمثلاً قطر الدائرة التي نصف قطرها 1 يساوي 2؛ هذا العدد نفسه هو قطر المنطقة المفتوحة داخل الدائرة وقطر المنطقة المغلقة أيضاً. قطر المجموعة المكونة من النقاط الثلاث $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ يساوي $\sqrt{2}$. لاحظ أنه قد لا يوجد نقاط x, y في E بحيث $d(x, y) = \text{diam } E$ حتى ولو كانت E محدودة. فمثلاً إذا كانت E جواراً في R_2 فإنه لا يوجد نقاط في E تبعد عن بعضها بالمسافة $\text{diam } E$.

ولكن يوجد مثل هذه النقاط إذا كانت E مجموعة متراصة غير خالية في R_1 أو R_2 . البرهان كالتالي. لنفرض عدم وجود النقاط x, y في E بحيث $d(x, y) = \text{diam } E$. من تعريف القطر لابد من وجود أزواج من النقاط $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots$ حيث إن $d(x_n, y_n) > \text{diam } E - \frac{1}{n}$. يوجد عدد لانهائي من قيم x_n و y_n المختلفة (وإلا وجدنا x و y بحيث $d(x, y) = \text{diam } E$). إذا وجد عدد لانهائي من قيم x_n المختلفة فلا بد من وجود نقطة نهاية لها (بواسطة نظرية بولزانو - فيرستراس) وبإمكاننا أن نختار متتالية جزئية تؤول إلى نقطة النهاية هذه. إذا لم يوجد إلا عدد نهائي من القيم المختلفة لـ x_n فلا بد أن يتكرر واحد منها ولتكن x_1 عدداً لانهائياً من المرات ولذا فالمتتالية التي جميع عناصرها تساوي x_1 سوف

تؤول إلى x_1 . نعمل نفس الشيء مع y_n المرافقة لـ x_n . نحصل على متتاليات نسميها $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ وذلك من أجل سهولة الرموز، بحيث $x_n \rightarrow x_0$ و $y_n \rightarrow y_0$ و $d(x_n, y_n) \rightarrow \text{diam } E$. إذن لابد أن يكون $d(x_0, y_0) = \text{diam } E$ ، لأن $d(x_0, y_0)$ لا يمكن أن يتعدى $\text{diam } E$ لأن E مغلقة ولذا فإن x_0 و y_0 في E . كذلك المتراجحة المثلثية تعطينا

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_0) + d(y_n, y_0) + d(x_0, y_0)$$

$$\text{إذن } \text{diam } E \leq d(x_0, y_0).$$

تمرين (٨-٩)

عرف المسافة بين مجموعتين F و G على أنها $\inf d(x, y)$ حيث x في F و y في G . افرض أن F و G في R_2 مغلقتين وغير خاليتين وأن F محدودة. برهن على وجود النقاط x في F و y في G بحيث إن $d(x, y)$ هي المسافة بين F و G .

تمرين (٨-١٠)

إذا كانت N جواراً للنقطة y مكونة من جميع النقاط x بحيث $d(x, y) < r$ فهل يكون $\text{diam } N = 2r$ ؟ (خذ أولاً R_1 أو R_2 ثم خذ فضاء مترياً عاماً).

تمرين (٨-١١)

برهن أن E وإغلاقها لهما نفس القطر.

٩ - المجموعات المتداخلة ونظرية بير (Baire)

افرض أن لدينا مجموعتين E_1 و E_2 حيث $E_1 \supset E_2$ و E_2 ليست خالية. إذن يوجد نقطة واحدة على الأقل في كلتي المجموعتين حيث إن $E_1 \cap E_2 = E_2$. كذلك، إذا كان لدينا عدد نهائي من المجموعات المتداخلة (nested sets) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots \supset E_n$ والمجموعة الأخيرة E_n غير خالية، فلا بد من وجود نقطة واحدة مشتركة بين جميع

المجموعات. لا يوجد ما يناظر هذا في حالة عدد لانهائي من المجموعات المتداخلة غير الخالية، تقاطع هذه المجموعات قد يكون خالياً. خذ الأمثلة الثلاثة التالية:

(أ) E_n هي الفترة المفتوحة $(0, \frac{1}{n})$ في R_1 .

(ب) E_n هي مجموعة النقاط في فضاء الأعداد القياسية من R_1 بحيث $|x - \sqrt{2}| < \frac{1}{n}$.

(ج) E_n هي الفترة $[n, \infty)$ في R_1 . جميع

في كل من هذه الحالات، تقاطع جميع المجموعات E_n خال.

الآن نضع بعض الشروط التي تضمن أن تقاطع مجموعة من المجموعات المتداخلة غير خال. نظرية كانتور للمجموعات المتداخلة (Cantor's nested set theorem) تنص على أنه إذا كانت $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ والمجموعات E_n مغلقة غير خالية وكان الفضاء كاملاً وكذلك $\text{diam } E_n \rightarrow 0$ فإنه يوجد نقطة وحيدة في تقاطع جميع المجموعات E_n .

لاحظ أن نظرية كانتور تشترط ثلاثة شروط بالإضافة إلى أن المجموعات متداخلة وغير خالية: الإغلاق والقطر الصغير للمجموعات وكمال الفضاء. في كل من أمثلتنا الثلاثة حيث تقاطع المجموعات المتداخلة خال، نجد أن واحداً من الشروط لا يتحقق.

لكي نبرهن نظرية كانتور، خذ x_n في E_n . المتتالية $\{x_n\}$ متتالية كوشي لأنه إذا كانت $m > n$ فإن $x_m \in E_n$ و $d(x_n, x_m) \leq \text{diam } E_n$ ونحن نعرف أن $\text{diam } E_n \rightarrow 0$ ولـ للصفر. بما أن الفضاء كامل، إذن فالمتتالية $\{x_n\}$ لها نهاية في الفضاء. إذا اخترنا أي E_n فإن جميع x_k تنتمي إلى E_n إذا كانت $k \geq n$ ، إذن النهاية في E_n لأنها مغلقة. إذن النهاية في كل E_n . أخيراً، لا يمكن وجود نقطتين في كل E_n لأن قطر E_n لا يمكن أن يقل عن المسافة بين أي من نقطتين منه.

من المفيد أحياناً أن نتعامل مع صيغة النظرية الأضعف التالية: إذا ابقينا جميع فرضيات نظرية كانتور ما عدا الفرضية بأن $\text{diam } E_n \rightarrow 0$ والتي نستبدلها بأن المجموعات E_n متراصة فإننا نستطيع القول بأن تقاطع المجموعات E_n غير خال (ولكنه قد يشتمل على أكثر من نقطة الآن). بما أننا أبقينا الفرضية بأن E_n مغلقة،

ففي R_k فرضيتنا الجديدة تعني أن E_n محدودة كذلك في الفضاء R_k ، النظرية المعممة تصبح نتيجة بسيطة لمبدأ المتتالية الجزئية: المتتالية $\{x_n\}$ المكونه من نقطة من كل مجموعة لها متتالية جزئية متقاربة. نهاية هذه المتتالية هي النقطة المطلوبة.

لكن الحالة العامة تتطلب برهاناً آخر. دعونا نغطي E_1 بجوارات نقاطه بحيث لا يزيد قطر أي منها عن 1. بما أن E_1 متراص، إذن يوجد غطاء نهائي وليكن N_1, N_2, \dots, N_p . أحد المجموعات N_k لابد أن يحوي نقاط من جميع المجموعات E_n ، وإلا فإن كل N_k لا تتقاطع مع واحدة من E_m ، أي أنها لا تتقاطع مع جميع E_n حيث $n > m$ (تذكر أن E_n مجموعات متداخلة). إذا كانت N_1 منفصلة عن E_{m_1} و N_2 منفصلة عن E_{m_2} ، إلخ، فإنه لا يوجد N_k تحتوي نقاط من E_n لكل $n > m_0$ حيث m_0 أكبر قيم m_1, m_2, \dots, m_p . بما أن المجموعات N_k تغطي E_1 فهذا يعني أن E_1 لا تحوي نقاط من E_n لكل $n > m_0$ وهذا يتعارض مع الفرضية أن E_n مجموعات متداخلة. هذا التناقض يثبت وجود N_k تحتوي على نقاط من جميع E_n . إذاً إغلاق المجموعات $N \cap E_n$ هي مغلقة ومتداخلة وأقطارها لا تزيد عن 1. كرر هذه المحاكمة مع جوارات أقطارها لا تزيد عن $1/2$ وتغطي إغلاق المجموعة $N \cap E_1$ ؛ ثم مع جوارات أقطارها لا تزيد عن $1/3$ وهكذا. بهذه الطريقة نحصل على مجموعات متداخلة في E_n وأقطارها تؤؤل إلى الصفر ومن ثم نطبق نظرية كانتور في صيغتها الأصلية.

يمكن أحياناً استعمال نظرية كانتور لإثبات أن مجموعة معينة غير خالية. فمثلاً نستطيع البرهان على وجود دوال أو مجموعات تتمتع بخاصة معينة إذا تمكنا من كتابة هذه الدوال أو المجموعات كتقاطع مجموعات متداخلة تحقق فرضيات نظرية كانتور. ولكن يفضل عدم استعمال المجموعات المتداخلة مباشرة وإنما نستعمل نظرية أخرى والتي هي نتيجة لنظرية كانتور. لكي نقدم هذه النظرية الجديدة لابد من تقديم مفهوم المجموعات التي يمكن تمثيلها كاتحاد عدد قابل للعد من المجموعات المخلخلة. هذه المجموعات تسمى مجموعات من الفئة الأولى (First category). بما أن التسمية غير معبرة، فإننا أحياناً نسمي هذه المجموعات ضئيلة (Meager) لأسباب ستتضح فيما بعد.

في الفضاء R_1 ، أي مجموعة مكونة من عدد نهائي من النقاط تكون من الفئة الأولى. وكذلك أي مجموعة قابلة للعد، مثل مجموعة الأعداد النسبية. مع أن هذه المجموعة كثيفة في كل مكان إلا أنها تساوي اتحاد عدد قابل للعد من المجموعات كل منها يتكون من عنصر وحيد. بما أن مجموعة كانتور مغلخلة إذن فهي من الفئة الأولى ولكنها غير قابلة للعد. إذا أخذنا اتحاد مجموعة كانتور مع مجموعة الأعداد النسبية فإننا نحصل على مجموعة من الفئة الأولى، كثيفة في كل مكان وغير قابلة للعد. المجموعات التي ليست من الفئة الأولى تكون من الفئة الثانية (Second category) بما أن المجموعة الخالية مغلخلة، إذن فهي من الفئة الأولى وعليه فأي مجموعة من الفئة الثانية لا يمكن أن تكون خالية. هذه النتيجة هي الأساس في استعمال مفهوم الفئة: إذا تمكنا من إثبات أن مجموعة ما، من الفئة الثانية فلا بد أن تحوي هذه المجموعة بعض النقاط. نستطيع أحياناً أن نبرز مجموعة أشياء معينة على أنها من الفئة الثانية وهذا يعني وجود مثل هذا الأشياء. سنعطي بعض الأمثلة بعد قليل. الطريقة تعتمد على نظرية بير (Baire's theorem) التي تقول إن أي فضاء مترى كامل يكون من الفئة الثانية.

سنعطي بعض الملاحظات قبل أن نثبت النظرية. أولاً، كمال الفضاء المترى ضروري. الفضاء المترى المكون من الأعداد النسبية غير كامل وكل مجموعة مكونة من نقطة واحدة هي مغلخلة والفضاء اتحاد عدد قابل للعد من هذه المجموعات المغلخلة.

لاحظ أننا لا نستطيع أن نجزم بأن أي مجموعة قابلة للعد تكون من الفئة الأولى وإن كان هذا يبدو معقولاً. كما لاحظنا في تمرين (٦-١)، النقطة الواحدة قد لا تكون مجموعة مغلخلة. هذا يحدث مثلاً في أي فضاء يحتوي على عدد نهائي من النقاط. التمرين التالي يوضح الحالة المعاكسة.

تمرين (٩-١)

برهن أنه إذا كانت جميع نقاط فضاء هي نقاط نهاية فإن أي مجموعة مكونة من نقطة واحدة لا بد وأن تكون مغلخلة.

تمرين (٩-٢)

برهن أن نظرية بير تعني أن R_1 ومجموعة كانتور غير قابلة للعد.
 الآن نبرهن نظرية بير. اجعل E_n متتالية من المجموعات المخلخلة في فضاء ميري كامل. علينا أن نجد نقطة واحدة على الأقل لا تنتمي إلى أي من المجموعات E_n . أساس البرهان هو أنه إذا كانت E_1 مخلخلة فإن مكملتها تحتوي على جوار N_1 ، N_1 بدوره يحتوي على جوار N_2 يقع في مكملة E_2 وفي مكملة E_1 ، وهلم جرا. بهذه الطريقة نحصل على متتالية من الجوارات المتداخلة والتي تنفصل أكثر فأكثر عن E_k ، ولذا فإن أي نقطة مشتركة بين جميع N_k لا يمكن أن تقع في أي من المجموعات E_k .

لكي نبرهن على وجد نقطة مشتركة علينا أن نستفيد من نظرية كانتور. في البداية، خذ جوار N_1 في $C(E_1)$. خذ جواراً جزئياً في داخل الجوار الأول بحيث لا يزيد قطره عن 1 و اجعل M_1 إغلاق هذا الجوار الجزئي. بما أن E_2 مخلخلة، إذن M_1 تحوي جواراً في $C(E_2)$ (وكذلك في $C(E_1)$). اجعل M_2 إغلاق جوار جزئي N_2 قطره لا يتعدى $1/2$. نكرر هذه العملية، ونحصل على مجموعات M_k مغلقة ومتداخلة وأقطارها تؤول إلى الصفر وتحقق الخاصية، إن M_k منفصلة عن E_1, E_2, \dots, E_k . النقطة المشتركة بين جميع M_k هي النقطة المطلوبة لأنها لا تقع في أي من المجموعات E_k .

١٠ - بعض التطبيقات على نظرية بير

(أ) من خواص التكاملات المكررة (Repeated Integral):

لتكن f دالة حقيقية متصلة على فترة حقيقية مثل $[0, 1]$. اجعل f_1 أي تكامل للدالة f و f_2 أي تكامل لـ f_1 وهلم جرا. إذا كان أحد التكاملات f_k يساوي الصفر على الفترة بكاملها فإن f تساوي صفراً على الفترة: للبرهان ما علينا إلا أن نشق f_k مراراً. النظرية التالية تعمم هذه النتيجة: إذا وجد لكل x ، رقم k (قد يعتمد على x) بحيث $f_k(x) = 0$ فإن f تساوي صفراً على الفترة. لبرهان هذه النظرية، اجعل E_k مجموعة النقاط x بحيث $f_k(x) = 0$ ؛ فرضيتنا

تقول إن كل x في $[0, 1]$ تقع في إحدى المجموعات E_k . من نظرية بير نستنتج أن E_k لا يمكن أن تكون جميعها مغلقة. إذن يوجد k بحيث إن إغلاق E_k يملأ فترة نسميها I_k . بالنسبة للقيمة k هذه، f_k متصلة وتساوي صفراً على المجموعة E_k ، إذن $f_k(x) = 0$ لكل x في I_k .

إذا لم تكن I_k جميع $[0, 1]$ ، فإننا نكرر هذه المناقشة على مايتبقى من $[0, 1]$ وهلم جرا. بهذه الطريقة، نجد أن $f(x) = 0$ لجميع قيم x في مجموعة كثيفة في كل مكان؛ وبما أن f متصلة فلا بد أن $f(x) = 0$ لجميع x في الفترة $[0, 1]$. إن كانت $f(x) \neq 0$ فبغض النظر عن كيفية اختيار التكامل f_k لا بد أن يوجد قيمة لـ x (في الحقيقة مجموعة كثيفة في كل مكان) بحيث $f_k \neq 0$ لكل قيم k . (ب) تمثيل كثيرات الحدود:

خذ دالة متصلة حقيقية f على الفترة $[0, 1]$. إذا كان للدالة f مشتقة نونية تساوي الصفر فبالإمكان أن نبرهن (عن طريق قانون القيمة المتوسطة) أن f تتطابق على $[0, 1]$ مع كثيرة حدود لا تزيد درجتها عن $n - 1$. النظرية التالية تعمم هذه الحقيقة كما عملنا في فقرة (أ). لتكن f دالة اشتقاقية من جميع الدرجات على $[0, 1]$ ، وافرض أنه عند كل نقطة يوجد مشتقة للدالة f تساوي صفراً، أي لكل x يوجد رقم $n(x)$ بحيث $f^{(n(x))}(x) = 0$. إذن f تتطابق على $[0, 1]$ مع كثيرة حدود. ^(٧)

نبدأ البرهان، بجعل E_n مجموعة x بحيث $f^{(n)}(x) = 0$. بالفرض كل x تقع في إحدى E_n على الأقل. من نظرية بير، يوجد فترة مغلقة I بحيث إن واحداً من E_n كثيف في كل مكان. بما أن $f^{(n)}$ متصلة إذن $f^{(n)}(x) = 0$ في I والدالة f تساوي كثيرة حدود في I . إذا لم تكن I جميع الفترة $[0, 1]$ فإننا نكرر المحاكمة في الجزء الباقي من $[0, 1]$ وهلم جرا. بهذه الطريقة نحصل على مجموعة كثيفة في كل مكان مكونة من فترات على كل منها الدالة f تساوي كثيرة حدود. بقي علينا أن نبرهن أن f تساوي كثيرة حدود واحدة على جميع الفترات.

لهذا الغرض سوف نطبق نظرية بير مرة أخرى على المجموعة المخلخلة H المتبقية عندما نزيل النقاط الداخلية من المجموعة الكثيفة المكونة من فترات من

$[0, 1]$. علينا أن نبرهن أولاً أن H تامة. في المقام الأول، H مغلقة لأننا حصلنا عليها بإزالة مجموعة من الفترات المفتوحة من فترة مغلقة. افترض أن H غير تامة وليس فقط الزوج $\{0, 1\}$ (وإلا كان لدينا فترة واحدة من البداية ولم يبق مانبرهنه). إذن يوجد نقطة y في H ليست نقطة نهاية. هذه النقطة طرف مشترك لفترتين في كل منهما f تساوي كثيرة حدود. إذا كانت n أكبر من درجتي كثيرات الحدود فإن $f^{(n)}(x) = 0$ لجميع x في كلتي الفترتين وكذلك عند الطرف لأن $f^{(n)}$ متصلة. إذن f تتطابق مع كثيرة حدود في اتحاد الفترتين والنقطة y لا تنتمي إلى المجموعة H .

المحاكمة السابقة تثبت أن H تامة، والآن نفرض أنها غير خالية. اعتبر H فضاء مترياً كاملاً. نطبق نظرية بير على H ونحصل على E_n كثيف في جوار من H ، أي أنه يوجد فترة J تحوي نقاطاً من H و $f^{(n)}(x) = 0$ لكل x في $J \cap H$. الفترة J تحوي فترات مكملة للمجموعة H وفي كل من هذه الفترات K ، $f^{(m)}(x) = 0$ لقيمة معينة m (تعتمد على K). إذا كانت $m \leq n$ فإن $f^{(n)}(x) = 0$ داخل K بالإشتقاق. إذا كانت $m > n$ فإن $f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = \dots = 0$ عند أطراف K لأن الأطراف في H . بالتكامل المتكرر للدالة $f^{(m)}$ ، نحصل على $f^{(n)}(x) = 0$ على جميع K . نطبق هذه المحاكمة على كل فترة K مكملة لـ H وفي داخل J ؛ إذاً $f^{(n)}(x) = 0$ في J . إذن J لا تحوي نقاطاً من H في الحقيقة. ولكننا توصلنا إلى أن J فترة تحتوي على نقاط من H بسبب فرضيتنا أن H غير خالية. هذا التناقض يدل على أن H لا بد أن تكون خالية، إذن لا يوجد إلا فترة واحدة $I = [0, 1]$ منذ البداية والدالة f تساوي كثيرة حدود واحدة على هذه الفترة.

(ج) دوال متصلة ومتذبذبة في كل مكان (Continuous Every, Where Oscillating Functions):

في هذا التطبيق نأخذ الفضاء المتري المكون من الدوال المتصلة على فترة حقيقة. سنبرهن فيما بعد (الجزء ١٧) إن هذا الفضاء كامل. دعونا الآن ننشئ دالة متصلة وغير مطردة (Not monotonic) في أي فترة. بالإمكان إنشاء مثل هذه الدالة مباشرة

ولكن سنستعمل نظرية بير من أجل توضيح استعمالاتها. الفترات التي أطرافها أعداد قياسية تكون مجموعة قابلة للعد. سمها I_1, I_2, I_3, \dots وليكن E_n مجموعة عناصر الفضاء C المطردة على I_n . سوف نثبت أن كل مجموعة E_n مغلخلة في C ومن هذا بواسطة نظرية بير نثبت وجود عنصر في الفضاء C لا ينتمي إلى أي من المجموعات E_n . بمعنى آخر، يوجد دالة متصلة غير مطردة على أي من الفترات I_n وهذا يعني أن الدالة غير مطردة على أي فترة لأن كل فترة في R_1 تحوي فترة أطرافها أعداد قياسية.

الطريقة لإثبات أن E_n مغلخلة مفيدة في تطبيقات عديدة وتتلخص في إثبات أن $C(E_n)$ مفتوحة وكثيفة في كل مكان.

تمرين (١٠-١)

اثبت أن المجموعة المغلقة والتي مكملتها كثيفة في كل مكان، تكون مغلخلة. في البداية، نثبت أن $C(E_n)$ مفتوحة. إذا كانت f تنتمي إلى $C(E_n)$ فإن f غير مطردة على I_n . هذا يعني وجود ثلاث نقاط y, x و z في I_n حيث $x < y < z$ و $f(x) < f(y)$ و $f(x) < f(y)$ و $f(z) < f(y)$ أو $f(x) > f(y)$ و $f(z) > f(y)$. نذكر أن المسافة بين f و g في الفضاء C تساوي $\max |f(x) - g(x)|$ فإذا كانت g أقرب إلى f من نصف القيمة الصغرى من بين القيم $f(y) - f(x)$ و $f(y) - f(z)$ ، فإن $g(x) < g(y)$ و $g(z) < g(y)$ ومن هذا نري أن g غير مطردة على I_n . أي أن جميع العناصر g القريبة بصورة كافية من f ليست في E_n وهذا يعني أن $C(E_n)$ مفتوحة.

القول بأن مكملة E_n كثيفة في كل مكان يعني أنه في كل جوار في C ، يوجد دالة f غير مطردة على I_n . إن وجود دالة متذبذبة قريبة من أي دالة متصلة لأمر بديهي. لكي نبرهن على هذا، نستطيع أن نجعل g مركز جوار في الفضاء C ، ونحن نستطيع تقريب g في الفضاء C بصورة اختيارية بواسطة كثيرة حدود P (انظر الجزء ١٩). كثيرة الحدود لها مشتقة محدود فإذا أضفنا إلى الدالة P ، داله منشارية صغيرة،

أسنانها شديدة الانحدار فإننا نحصل على دالة f قريبة من g حسب مانريد وغير مطردة على I_n .

(د) وجود دالة متصلة غير اشتقاقية في أي مكان :

وجود دالة متصلة ليس لها مشتقة عند أي نقطة كان مفاجأة لرياضيي القرن التاسع عشر. في الحقيقة، «معظم» الدوال المتصلة من هذه النوعية والمفروض أن ندهش عندما نعر على دالة متصلة قابلة للاشتقاق حتى عند نقطة واحدة. الأغرب من ذلك، وجود دالة متذبذبة في كل مكان ومع ذلك لها مشتقة نهائية عند كل نقطة. لسوء الحظ، جميع الأمثلة المعروفة حول الظاهرة الأخيرة معقدة ولانستطيع تقديمها هنا. ^(٨)

سوف نثبت ^(٩) أن عناصر الفضاء C والتي لها مشتقة نهائية حتى عند نقطة واحدة أو حتى مشتقة من طرف واحد تكون مجموعة من الفئة الأولى في الفضاء C . هذه النظرية تدل على أن جميع الدوال المعروفة في حساب التفاضل والتكامل تمثل مجموعة من الفئة الأولى فقط في C . إننا هنا لانستبعد إمكانية أن «معظم» عناصر C قد يكون لها مشتقات لانهائية من طرف واحد عند معظم النقاط (هندسياً، هذا يعني أن الرسوم لها قرون (Cusps). سوف نرى في الجزء ٢١، أن الدالة المتصلة لايمكن أن يكون مماسها رأسي عند جميع نقاط فترة. مع أنه يوجد دوال غير اشتقاقية في أي مكان بدون مشتقات لانهائية من طرف واحد، إلا أن انشائها معقد ^(١٠)، الصعوبة قد تكون مرتبطة مع كون مجموعة هذه الدوال مجموعة من الفئة الأولى. ^(١١) «معظم» الدوال المتصلة لها قرون على مجموعة كثيفة في كل مكان (مثل الدالة $y = |x|^{1/2}$ عند المركز). الدالة غير الاشتقاقية في أي مكان لابد أن تكون متذبذبة في كل مكان لأن الدالة المطردة لها مشتقة عند معظم النقاط (انظر الجزء ٢٢).

الآن نبرهن على أن الدوال غير الاشتقاقية في أي مكان تكون مجموعة في C من الفئة الثانية. خذ المجموعة E_n المؤلفة من العناصر f في C بحيث إنه عند نقطة x من الفترة $[0, 1 - 1/n]$

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq n$$

إذا كانت $0 < h < 1/n$. واضح أن أي دالة f بمشتقة نهائية من الطرف الأيمن عند x تنتمي إلى واحدة من المجموعات E_n . إذن اتحاد المجموعات E_n يحتوي جميع عناصر الفضاء C التي لها مشتقة نهائية من الطرف الأيمن عند نقطة ما . سوف نبرهن على أن كل E_n مغلقة ، وعليه فإن اتحادها جميعاً يعطي مجموعة من الفئة الأولى ولذا فهو لا يساوي الفضاء C . كما في المثال السابق سنثبت أن E_n مغلقة ومكملتها كثيفة في كل مكان .

نبرهن أن E_n مغلقة بنفس الطريقة المستعملة في المثال (ج) أو من كون المتراجحة التي تعرف E_n تبقي صحيحة عند التقارب في C . أما أن مكملة E_n كثيفة في كل مكان فهذا ينتج بنفس طريقة المثال (ج) : إذا كانت f دالة متصلة فإننا نوجد دالة قريبة من f ولها مشتقة محدودة ثم نضيف إلى هذه الدالة ، دالة متصلة صغيرة بحيث يكون ميل رسمها البياني كبيراً في القيمة المطلقة .

(هـ) تحليل فترة مغلقة

تمرين (١٠-٢)

برهن أن الفترة المغلقة لا يمكن أن تساوي اتحاد عدد لانهائي قابل للعد من المجموعات المغلقة المنفصلة وغير الخالية

١١ - المجموعات التي مقياسها صفر

(Sets of Measure Zero)

يمكن أن نعتبر أي مجموعة من الفئة الأولى بأنها مجموعة مؤلفة من عدد قليل من النقاط وذلك لأنها لا يمكن أن تملأ فضاء مترياً كاملاً . ومع ذلك ، يمكن أن نعتبر هذه المجموعات كبيرة إذا نظرنا إليها من وجهة نظر أخرى . مجموعات الفئة الأولى قد تكون كثيفة في كل مكان مثل النقاط القياسية في R_1 وقد تكون غير

قابلة للعد مثل مجموعة كانتور، وقد تكون كثيفة في كل مكان وغير قابلة للعد كما رأينا سابقاً.

هناك نوع آخر من المجموعات «الضئيلة» والتي لها استعمالات كثيرة. لنفرض أن مجموعة E في R_1 ويمكن تغطيتها بمجموعة قابلة للعد من الفترات المفتوحة والتي يمكن جعل مجموع أطوالها صغيراً حسب ما نريد. في هذه الحالة، نقول إن E مجموعة مقياسها صفر. هناك تعريف مشابه في R_n . المجموعات التي مقياسها صفر هي المجموعات التي يمكن إهمالها في نظرية تكامل ليبيج (Lebesgue integration) والاسم مقياس (measure) يأتي من هذه النظرية. إذا حدث شيء على مجموعة ما عدا التي مقياسها صفر، فإننا نقول إنه حدث في كل مكان تقريباً أو لكل النقاط تقريباً. اتحاد مجموعتين، أو عدد نهائي أو حتى مجموعة قابلة للعد من المجموعات التي مقياسها صفر يعطينا مجموعة مقياسها صفر.

واضح أن أي مجموعة قابلة للعد في R_1 ، مقياسها صفر ولذا يوجد مجموعة مقياسها صفر وكثيفة في كل مكان. على العكس من ذلك، المجموعة التي مقياسها صفر قد لا تكون قابله للعد أو حتى من الفئة الأولى، بينما المجموعة من الفئة الأولى قد لا يكون مقياسها صفر. الآن نعطي بعض الأمثلة على ما ذكرناه. أولاً، مجموعة كانتور غير قابله للعد ولكن مقياسها صفر. إذا كان ϵ عدداً موجباً صغيراً، فإننا نأخذ عدداً كافياً من الفترات المكملية من E بحيث يزيد مجموع أطوالها عن $1 - \epsilon/2$. المجموعة الباقية والتي تحوي E يمكن تغطيتها بعدد متناه من الفترات لا يزيد مجموع أطوالها عن ϵ ولذا فإن مقياس E يساوي صفر كما ذكرنا.

الآن ننشئ مجموعة من الفئة الأولى ومقياسها ليس صفرًا عن طريق تعديل لمجموعة كانتور. اجعل $\{a_n\}$ متتالية الأعداد الموجبة بحيث $\sum a_n = \epsilon < 1$. احذف من فترة الوحدة، فترة مفتوحة طولها a_1 ، ثم احذف من كل من الفترتين الباقيتين، فترة مفتوحة طولها $a_2/2$ وهلم جرا. مثل مجموعة كانتور، سوف نحصل على مجموعة مغلخلة E ولذا فهي من الفئة الأولى. كذلك مقياس E ليس صفرًا لأنه لو أمكن تغطية E بمجموعة قابلة للعد من الفترات التي مجموع أطوالها أقل من $1 - \epsilon$ ،

لاستطعنا تغطية فترة الوحدة بمجموعة من الفترات مجموع أطوالها أقل من ١ وهذا مستحيل .

لكي ننشئ مجموعة من الفئة الثانية ومقياسها صفر، علينا أن ننشئ مجموعة كانتور المعممة E من النوع الذي أشرنا إليه قبل قليل . في الفترات المكملية للمجموعة E ، ننشئ مجموعات مماثلة وهكذا بإمكاننا أن نجعل مقياس مكملية اتحاد جميع مجموعات كانتور المعممة يساوي صفر، وبما أن كل مجموعة كانتور مغلقة، إذن هذه المكملية من الفئة الثانية .

بما أن مقياس كل فترة في R_1 لا يساوي صفرًا، فيمكننا أن نثبت أن مجموعة من النقاط غير خالية بإثبات أن مقياس مكملتها صفر . فمثلاً، مقياس أي مجموعة قابلة للعد في R_1 يساوي صفرًا، وعليه فإن R_1 غير قابل للعد . المجموعة التي مقياسها صفر مثل المجموعة من الفئة الأولى «صغيرة» بمعنى أن مكملتها لا يمكن أن تكون خالية، ولانستطيع أن نقول أي شيء عن مدى صغر المجموعة بدون اللجوء إلى نظرية مقياس ليبيج (Lebesgue measure) .

تمرين (١١-١)

افرض أن المجموعة E في R_1 تحقق الخاصية الآتية : يوجد عدد موجب q أقل من 1 بحيث إنه لكل فترة (a, b) نستطيع تغطية المجموعة $E \cap (a, b)$ بمجموعة قابلة للعد من الفترات والتي مجموع أطوالها لا يتعدى $q(b - a)$. برهن أن مقياس E يساوي صفرًا . (هذا يعني أن المجموعة التي تغطي جزءاً معيناً على الأكثر من كل فترة، لا تغطي أي شيء تقريباً من أي فترة) .

الفصل الثاني

الدوال

١٢ - الدوال

في مبادئ الرياضيات نقول إن y دالة في المتغير x إذا أمكن تحديد y لكل قيمة من قيم x . هذا تعريف عملي جيد ويكفي لكثير من التطبيقات. بالرغم من ذلك، يجب أن نشير أن هذا ليس تعريفاً دقيقاً لمفهوم الدالة. (بنفس الطريقة نحن نتعامل مع الجملة $y \rightarrow \infty$ مع أن الرمز ∞ لا يعنى شيئاً في حد ذاته). من الأفضل في الحقيقة إعطاء تعريف رياضي دقيق لمفهوم الدالة. خذ مجموعتين غير خاليتين F, E من الأعداد الحقيقية وكون طائفة من الأزواج المرتبة (x, y) حيث $y \in F, x \in E$ وحيث إن كل x تظهر مرة واحدة فقط وكل y تظهر مرة واحدة على الأقل. هذه الطائفة من الأزواج المرتبة تسمى دالة نطاقها E ومداها F أو باختصار دالة من E إلى F . فمثلاً إذا كانت E مجموعة الأعداد الحقيقية R_1 و F الفترة المغلقة $[-1, 1]$ والأزواج المرتبة هي $(x, \sin x)$ لكل x في R_1 . هذا مانسميه في العادة بالدالة $\sin x$. لاحظ أننا لو جعلنا E الفترة $[0, 2\pi]$ بدلاً من المجموعة R_1 فإن مجموعة الأزواج المرتبة $(x, \sin x)$ حيث $x \in E$ تمثل دالة مختلفة، وهي تحديد الدالة الأصلية على الفترة $[0, 2\pi]$.

وهذا مثال آخر. إذا كانت E تمثل الأعداد الموجبة $1, 2, 3, \dots$ و F تمثل لمجموعة $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ فإن الدالة التي أزواجها المرتبة $(1, 1), (2, 4), (3, 9), \dots$ مثال على دالة خاصة تسمى في العادة متتالية أعداد حقيقية.

تمرين (١٢-١)

أى معادلة فى متغيرين x و y تحدد مجموعة من الأزواج المرتبة (x, y) التى تحقق المعادلة . على هذا الأساس فهى قد تعين أو لاتعين دالة . قرر أى من المعادلات الآتية تعين دوال :

$$(أ) \quad x^2 + y^2 = 25 \quad (ب) \quad x^2 + y^2 = 0$$

$$(جـ) \quad y = |x| \quad (د) \quad |x| + |y| = -2$$

$$(هـ) \quad y = \cos x \quad (و) \quad x = \cos y$$

إذا كانت المجموعة F مكونة من عنصر وحيد مثل العدد 3 فإن الدالة التى أزواجها المرتبة $(x, 3)$ تكون دالة ثابتة ويجب التفريق بينها وبين الرقم 3 . بالإمكان تعميم تعريف الدالة على النحو التالى . لتكن E مجموعة غير خالية من النقاط فى فضاء معين S (هذا الفضاء قد يكون R_n أو C أو أى فضاء آخر وقد لا يكون فضاءاً مترياً) ولتكن F مجموعة غير خالية من نقاط فى فضاء آخر T قد يختلف تماماً عن الفضاء S . إن طائفة جميع الأزواج المرتبة (x, y) حيث x فى S و y فى T تسمى الضرب الكارتيـزى لـ T, S . أى دالة من E إلى F تكون مجموعة جزئية من هذا الضرب الكارتيـزى وتتكون من جميع الأزواج (x, y) حيث يظهر كل عنصر فى E مرة واحدة فقط ويظهر كل عنصر فى F مرة واحدة على الأقل . هذه دالة من E إلى T . ونقول إن نقاط المجموعة F قيم للدالة وأن F صورة E . أحياناً نسمى مثل هذه الدالة راسماً من E إلى F .

الضرب الكارتيـزى لمجموعة الأعداد الحقيقية R_1 يعطى الفضاء R_2 (إذا أخذنا المسافة المناسبة فى الفضاء الجديد) . الدالة نطاقها ومداهـا فى R_1 تمثل مجموعة من النقاط فى R_2 تسمى منحنى الدالة . مثل هذه الدالة تسمى دالة حقيقة فى متغير حقيقى . فى هذا الكتاب لن نعرف ولن نستخدم مفهوم المتغير .

المزية الرئيسية من هذا التعريف المجرد للدالة والذى يعتمد على مجموعة من الأزواج المرتبة هو أنه يعطينا أشياء رياضية معروفة بدلالة مفاهيم سابقة معروفة لدينا .

ولذا نستطيع إرجاع أى برهان حول الدوال إلى هذه المفاهيم الأولية . من عيوب هذا التعريف أننا نفقد المحتوى البديهي لمفهوم الدالة . لذا يستحسن النظر إلى الدالة على أنها تحويل أو راسم أو قاعدة تنقل عناصر النطاق إلى النطاق المصاحب وخصوصاً عند تقديم المفهوم لأول مرة وكذلك فى تطبيقات مفهوم الدالة فى مجال الفيزياء وغيرها من الأغراض العملية .

يمكن أخذ مجموعة الأزواج المرتبة على أنها نموذج للدالة وليست الدالة ذاتها . إذا أخذنا مفهوم الدالة على أنه مفهوم أولي فبالإمكان عندئذ تعريف الزوج المرتب بدلالة الدالة^(١١) .

المتتالية دالة نطاقها مكون من الأعداد الموجبة . عند معالجة المتواليات نعتبر النطاق معروف وثابت ولذا فإننا نحدد المتتالية بسرد نقاط المدى حسب الترتيب المستمد من نقاط النطاق . وعندئذ نسمى نقاط المدى عناصر المتتالية بدلاً من تسميتها قيم الدالة . هذا يعيدنا إلى التعريف غير الدقيق للمتتالية والذي استعملناه فى السابق . إذاً المتتالية $\{2, 4, 8, 16, \dots\}$ أو المتتالية $\{2^n\}$ تعنى مجموعة الأزواج المرتبة $\dots (1, 2), (2, 4), (3, 8), \dots$ والمتتالية $\{1\}$ تعنى مجموعة الأزواج $\dots (1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots$. المتتالية الجزئية لمتتالية معطاة هى تخصيص (تحديد) المتتالية على مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية ويمكن تحديدها عن طريق إعادة ترقيم عناصر المتتالية . فمثلاً $\{2^n\}$ متتالية جزئية لمتتالية $\{n\}$. (المتتالية المنتهية لا تعتبر متتالية حسب تعريفنا هنا) .

إذا أردنا أن نكون دقيقين فعلينا أن نفرق بين رمز الدالة f وبين قيمة الدالة عند النقطة x أى $f(x)$. الرمز f يمثل مجموعة الأزواج المرتبة بينما $f(x)$ ترمز للنقطة فى المدى والتي ترتبط مع النقطة x فى النطاق . فمثلاً ، الدالة اللوغارتمية مكونة من الأزواج $(x, \log x)$ ؛ أحد هذه الأزواج $(e, 1)$ و $\log(e) = 1$. فى العادة لانفرق بين الدالة وقيمتها . وقد يبدو الحديث عن الدالة $\log x$ غريباً ولكن علينا أن نحدد نطاق الدالة والذي يتكون من الفترة $(0, \infty)$ فى هذه الحالة . أحياناً نريد الحديث عن دوال أكثر تعقيداً مثل الدالة التى تأخذ القيمة $\log(\sin x)$ عند x ، وفى هذه الحالات لامفر من استخدام العبارة غير الدقيقة «الدالة $\log(\sin x)$ » ، إننا نواجه نفس المشكلة عندما نريد الحديث عن بعض الدوال البسيطة والتى لا يوجد لها أسماء متفق عليها . الدالة التى

أزواجها المرتبة (x, x) حيث x في النطاق تدعى الدالة x « ولكن بصورة أدق نقول إنها الدالة I حيث $I(x) = x$.

إذا كان نطاق الدالة f في R_1 فإن قيمها تكتب في الصورة $f(x)$. أما إذا كان النطاق في R_2 فإننا نكتب القيم في الصورة $f(x, y)$ ، مع أن $f((x, y))$ أدق في الحقيقة . يرمز في العادة لعناصر متتالية بالرمز s_n بدلاً من $s(n)$. مع أنه من المفروض أن نرمز للمتتالية بالرمز s . فمثلاً المتتالية المكونة من الأزواج المرتبة $(1, 1), (2, 4), (3, 9), \dots$ تكتب في العادة $\{n^2\}$ وكذلك أى تحديد للمتتالية يرمز له كالتالى $\{n^2\}$ ، $\{n^2\}_{n=3}^8$ ، $\{n^2\}_{n=3}^\infty$ حيث n فردية وهلم جراً . بنفس الطريقة ، نستطيع كتابة دالة f مثل $f(x) = \sin 2x$ حيث النطاق R_1 في الصورة $\{\sin 2x\}$ بحيث يرمز $\sin 2x$ للنقاط التى فى مدى الدالة والتي ترتبط مع النقاط x من النطاق . تحديد هذه الدالة على الفترة $(0, 2\pi)$ يصبح $\{\sin 2x\}$ حيث $0 < x < 2\pi$. هناك رموز كثيرة شائعة الاستعمال^(١٢) ، وليس من الحكمة الالتزام بأى منها فى هذا الكتاب .

فى الأصل ، كانت الدالة هي ما يعرف بواسطة قاعدة أو قانون ولم يسبب هذا أى مشاكل لمدة طويلة . بالإمكان التعبير عن الكثير من الدوال بواسطة قوانين قد تكون معقدة إلى حد ما . (لاحظ أن الدالة البسيطة $f(x) = \sin x$ تخفي وراءها عملية تتعلق بمفهوم النهايات) . فمثلاً إذا كانت $f(x) = !$ حيث x عدداً نسبياً و $f(x) = 0$ ، حيث x غير نسبي فإن

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^n.$$

تمرين (١٢-٢)

تحقق من العلاقة السابقة .

هذا مثال آخر أكثر تعقيداً^(١٣) .

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^m [1 - (\cos\{(v!)^r \pi / x\})^{2n}]$$

هذه الدالة تعطينا عند العدد الصحيح الموجب x أكبر عامل أولي للعدد x . إن الدوال التى يمكن الحصول عليها من الدوال المتصلة بعملية نهاية واحدة

تعتبر دوال خاصة (راجع الجزء ١٨). في الحقيقية يوجد دوال نطاقها ومداها في R_1 لا يمكن الحصول عليها من الدوال المتصلة وبعدها لانهائي قابل للعد من عمليات النهاية^(١٤). سوف لنعطى مثلاً على هذه الظاهرة هنا.

مع أن الدوال بصفة عامة تتمتع ببعض الخواص الشيقة والجديرة بالاهتمام (راجع بند ٢١) نجد أن معظم الخواص الهامة مقصورة على دوال تنتمي إلى مجموعات معينة. لحسن الحظ، نجد أن معظم الدوال التي تظهر بصورة طبيعية في تطبيقات الرياضيات تكون في الغالب متصلة أو قابلة للاشتقاق. لذا نجد أن دراسة خواص مثل هذه الدوال أمر هام ومرغوب فيه.

١٣ - الدوال المتصلة

سوف نعرف ماذا نعني بالدوال المتصلة ومن ثم نناقش بعض خواص هذه الدوال. لم يظهر مفهوم الاتصال في الرياضيات بهذه الصورة وإنما جاء المفهوم أولاً ثم بحث الناس عن تعريف مناسب لمفهوم الاتصالي البديهي. إذا كانت الدالة معرفة على فترة من R_1 فقد كان الاعتقاد في وقت ما أن مثل هذه الدالة تكون متصلة إذا أخذت كل قيمة واقعة بين أي قيمتين من قيمها أي أن صورة كل فترة في النطاق تكون فترة أو نقطة. هذه خاصية القيمة المتوسطة (Intermediate value property). لسوء الحظ، هذه الخاصية وحدها لا تجعل الدالة تتمتع بجميع الخواص التي نتوقعها في الدالة المتصلة. فمثلاً الدالة $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ لجميع قيم x ما عدا 0 و $f(0) = 0$ تحقق خاصية القيمة المتوسطة ولكننا لانجدها متصلة عند النقطة 0. بالإمكان إنشاء دالة تحقق خاصية القيمة المتوسطة في كل فترة مهما كانت صغيرة بدون أن تكون متصلة وذلك لأنها تأخذ جميع القيم بين 0 و 1 على كل فترة.

ننشئ هذه الدالة على النحو التالي.^(١٥) خذ x بين 0 و 1 وانشرها في النظام العشري $x = 0.a_1a_2 \dots$ ونخذ العدد $z = 0.a_1a_3a_5 \dots$. إذا لم تكن z كسراً دورياً، اجعل $f(x) = 0$. أما إذا كانت z دورية حيث تبدأ دورتها الأولى بالخانة a_{2n-1} فسوف

نجعل

$$f(x) = 0.a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4} \dots$$

هذا يعرف الدالة المطلوبة f . إذا كانت I أى فترة معطاة فباستطاعتنا إيجاد n كبيرة بصورة كافية بحيث تحوى الفترة I كسراً منتهياً $0.a_1a_2 \dots a_{2n-1} \dots$ وكذلك جميع الأعداد $0.a_1a_2a_3 \dots a_{2n-1}a_{2n}$ والتي تبدأ بنفس الخانات الأولى وعددها $2n-1$. ليكن $y = 0.b_1b_2 \dots$ أى عدد فى $(0, 1)$. نستطيع أن نجعل $0.a_1a_3 \dots a_{2n-1}a_{2n+1}a_{2n+3} \dots$ دورياً بحيث تبدأ دورته الأولى عند a_{2n-1} وعلى هذا الأساس نجد أن

$$x = 0.a_1a_2 \dots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3} \dots$$

وصورته $f(x) = y$.

الأمر الغريب هنا هو أن كل دالة معرفة على فترة فى R_1 ومداها فى R_1 يمكن تمثيلها كمجموع دالتين كل منهما تأخذ كل القيم الحقيقية فى كل فترة جزئية من نطاق الدالة (١٥).

ربما أن القارئ على علم بتعريف الاتصال للدوال الحقيقية المعرفة على R_1 . نقول إن الدالة f متصلة عند x_0 إذا تمكنا من إيجاد عدد موجب δ بحيث $|x - x_0| < \delta$ يقتضى أن $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ حيث ϵ عدد موجب اختياري؛ ونقول إن f متصلة على فترة ما إذا كانت متصلة عند كل نقطة من الفترة. الفكرة البديهية وراء هذا التعريف هى أن كل تغيير صغير فى مكان نقطة من النطاق يؤدي إلى تغيير صغير فى مكان صورتها فى المدى. ولكن علينا أن نعرف بأن هذا التعريف لا يتطابق تماماً كما نريد مع مفهومنا البديهي للدالة المتصلة. فمثلاً قد لا نتمكن من رسم منحنى دالة متصلة بواسطة القلم إذا كانت الدالة متذبذبة فى كل مكان (راجع الجزء ١٠). فى الحقيقة، المفهوم البديهي للدالة المتصلة أقرب إلى الدالة المتصلة والتي يتألف منحناها من عدد نهائي من الأجزاء المتزايدة أو المتناقصة.

بالإمكان تعميم تعريف الاتصال إلى الحالات التى يكون فيها النطاق والمدى فى أى فضاءات مترية. فى أبسط الحالات، يحتوى نطاق f على جوار حول النقطة x_0 وفى هذه الحالة نقول إن f متصلة عند x_0 بحيث إذا أعطينا أى عدد موجب ϵ ، تمكنا من إيجاد عدد موجب δ بحيث إذا كانت $d(x, x_0) < \delta$ فإن $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ (لاحظ أن الرمز d قد يعنى مسافات مختلفة).

إذا أردنا دراسة الاتصال في حالات أعم فسوف نجد أن الدالة قد تكون متصلة أو غير متصلة تبعاً للفضاء الذي يقع فيه نطاقها. فمثلاً، خذ دالة ثابتة معرفة على R_1 . هذه دالة متصلة عند كل نقطة من نطاقها. ولكن إذا اعتبرنا R_1 مجموعة جزئية من R_2 فإننا لانستطيع القول بأن الدالة متصلة عند أى نقطة لأنها غير معرفة في أى جوار من R_2 . في الحقيقة هذه الدالة تحديد أو تخصيص على R_1 لدوال كثيرة معرفة على R_2 وبعض هذه الدوال متصلة والبعض الآخر غير متصل.

باستطاعتنا دائماً أن نعتبر نطاق الدالة فضاءاً مترياً في حد ذاته، ومن ثم نتساءل ما إذا كانت الدالة متصلة بالنسبة إلى نطاقها. هناك فكرة جديدة لها علاقة بتخصيص دالة على مجموعة جزئية من نطاقها. قد يحدث أن يكون التخصيص دالة (بالنسبة للنطاق الجديد) وإن لم تكن الدالة الأصلية متصلة. فمثلاً الدالة f التي تأخذ القيمة 1 على الأعداد النسبية من R_1 والقيمة 0 على الأعداد غير النسبية غير متصلة عند جميع النقاط. ولكن تخصيص الدالة نفسها على المجموعة المكونة من الأعداد النسبية في R_1 يصبح دالة متصلة على الفضاء P . نقول في هذه الحالة إن الدالة الأصلية غير متصلة عند جميع نقاط P ، ولكنها متصلة على P بالنسبة للفضاء P . نستطيع تفادي الالتباس الذي ينتج عن مثل هذه الأمور إذا أخذنا في الاعتبار أن تعريف الدالة يتطلب تحديد نطاقها بالإضافة إلى تحديد كيفية حساب قيم الدالة. إن تحديد النطاق أمر ضروري وخصوصاً إذا كانت الدالة معطاة بواسطة قانون.

إذا قلنا إن الدالة f متصلة عند النقطة x_0 المنتمية للمجموعة E بالنسبة لـ E فإننا نعني أن تخصيص f على E دالة متصلة عند x_0 بالنسبة للفضاء E . بالإمكان الحصول على تعريف مكافئ وذلك عن طريق تعريف (ϵ, δ) المعطى في الصفحة السابقة بشرط أن ينتمي العنصر x إلى المجموعة E . فمثلاً لتكن f معرفة على فترة حقيقية تحوي x_0 داخلها ولتكن g تخصيص f على الفترة $[x_0, b)$ التي إلى يمين النقطة x_0 . إذا كانت g متصلة عند x_0 فإننا نقول إن f متصلة عند x_0 من اليمين. هذا يعني أن f تحقق شرط الاتصال عند x_0 حيث نأخذ جواران من اليمين فقط. كمثال، نأخذ الدوال f_1, f_2, f_3 والتي تأخذ القيمة -1 على $x < 0$ والقيمة +1 على $x > 0$ بينما $f_1(0) = 1, f_2(0) = -1, f_3(0) = 0$. إذن f_1 متصلة

من اليمين عند 0 ، f_2 متصلة من اليسار و f_3 غير متصلة من أى جهه وكذلك جميع الدوال الثلاث غير متصلة عند 0 .

تمرين (١٣-١)

برهن أن الدالة $f(x) = d(x, y)$ حيث y نقطة من فضاء مترى، هي دالة متصلة على الفضاء.

تمرين (١٣-٢)

لتكن E مجموعة مغلقة في فضاء مترى، وعرف الدالة $D(x)$ عند أى نقطة x من الفضاء بأنها بعد x عن E . برهن أن D متصلة.

إذا أردنا تعميم الاتصال إلى فضاءات غير مترية فعلينا البحث عن تعريف، ليعتمد على مفهوم المسافة. مع أننا سوف نقتصر على دراسة الفضاءات المترية في هذا الكتاب، إلا أننا سوف نعطي تعريف الاتصال في الفضاءات العامة وهذا التعريف العام مفيد حتى في حالة الفضاءات المترية. هذا التعريف الجديد يقول إن f متصلة على نطاقها إذا و إذا فقط كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في المدى هي مجموعة مفتوحة في النطاق. والنطاق f هنا فضاء ومعرف به مجموعات مفتوحة. الصورة العكسية لمجموعة E تعنى مجموعة نقاط النطاق والتي تقع صورها في E . فمثلاً، إذا كانت $f(x) = \sin x$ على النطاق R_1 فإن الصورة العكسية للفترة $(0, 1)$ تتكون من اتحاد الفترات $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(-2\pi, -\pi)$, ... والتي تعطى مجموعة مفتوحة. أما إذا كانت $f(x) = 1$ على $x > 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = -1$ على $x < 0$ فإن الصورة العكسية للفترة المفتوحة $(-1/2, 1/2)$ تتألف النقطة 0 وحدها ولذا فهي غير مفتوحة.

تمرين (١٣-٣)

أعط مثلاً يدل على أن صورة مجموعة مفتوحة تحت دالة متصلة قد لا تكون مفتوحة. لكى نتحقق من تكافؤ تعريفى الاتصال في حالة الفضاء المترى نفرض أن

f متصلة حسب التعريف الأول. لتكن E مجموعة مفتوحة في فضاء المدى ولتكن x_0 نقطة في الصورة العكسية لـ E . إذن $f(x_0) \in E$ وإذا كانت ε صغيرة بصورة كافية فإن كل y بحيث $d(f(x_0), y) < \varepsilon$ لابد وأن تنتمي للمجموعة E (لأن E مفتوحة). وحيث إن f متصلة فلا بد من وجود δ موجبة بحيث أن $d(x, x_0) < \delta$ يقتضى $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. إذن فجميع النقاط x القريبة بشكل كاف من x_0 تكون صورها في E ، وهذا يعنى أن الصورة العكسية لـ E تحوى جواراً كل نقطة من نقاطها ولذا فهي مفتوحة. والآن نبرهن الجزء الآخر، ونفرض أن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة هي مفتوحة. هذا يقضى أن الصورة العكسية لأي جوار في المدى ومعرف بالترابح $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ سيكون مفتوحاً ولذا فهو يحوى جواراً مثل $d(x, x_0) < \delta$ وهذا جوار مناسب يحقق الشرط المطلوب في التعريف الأول.

لقد برهنا على أكثر مما قصدنا في بداية الأمر، حيث أثبتنا أن f متصلة عند x_0 إذا وإذا فقط كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة حول $f(x_0)$ تحتوى جواراً للنقطة x_0 .

تمرين (١٣-٤)

إذا كانت f دالة حقيقية ومتصلة عند x_0 و $f(x_0) \neq 0$ فبرهن على وجود جوار حول x_0 بحيث $|f(x)| \geq m > 0$ على هذا الجوار.

تمرين (١٣-٥)

إذا كانت f دالة حقيقية معرفة في R_1 ومتصلة عند x_0 فبرهن على أن f محدودة على جوار ما حول x_0 .

تمرين (١٣-٦)

الدالة الحقيقية f معرفة على R_1 وغير متصلة عند x_0 ، أثبت وجود متتاليه $\{x_n\}$ نهايتها x_0 وعدد موجب ε بحيث $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$.

١٤ - خواص الدوال المتصلة

من المعروف أن مجموع أو حاصل ضرب أو خارج قسمة دوال متصلة يكون دالة متصلة (بشرط أن لا نقسم على صفر). يجب أن نفترض أن الدالتين f, g لهما نفس النطاق وأن قيم هذه الدوال في R_1 . في هذه الحالة نستطيع أن نعرف $f/g, fg, f + g$ بالطريقة المعتادة. إذا كانت f, g دالتين متصلتين عند x_0 فإن $f/g, fg, f + g$ جميعها دوال متصلة إذا كانت معرفة. إذا كان نطاقا الدالتين f, g مجموعتين مختلفتين فإن $f + g$ تعني مجموع تخصيص هاتين الدالتين إلى تقاطع نطاقي f, g وبنفس الطريقة، f/g يعني خارج قسمة تخصيص f, g إلى تقاطع نطاقي f, g بحيث لا تأخذ g القيمة صفر. لاحظ هنا أن الدالتين $f_1(x) = x/x$ و $f_2(x) = 1$ مختلفتان لأن نطاقاتهما مختلفة ولا يمكننا القول بأن f_1 متصلة عند 0 . التمرين (١٣-٥) مفيد عند دراسة اتصال حاصل ضرب دالتين.

تمرين (١٤-١)

إذا كانت f متصلة عند x_0 ، g غير متصلة عند هذه النقطة فبرهن أن $f + g$ غير متصلة هناك. هل بالإمكان أن تكون $f + g$ متصلة عند x_0 إذا كانت f, g غير متصلتين عند x_0 ؟

تمرين (١٤-٢)

أكمل تفاصيل براهين اتصال الدوال $f + g, fg, \frac{f}{g}$ حيث f, g دالتين متصلتين. نقول إن الدالة f أحادية (Univalent أو One-to-one) إذا لم تظهر أى قيمة y من المدى أكثر من مرة في مجموعة الأزواج المرتبة التي تكون الدالة. في هذه الحالة الأزواج المرتبة (y, x) حيث y في المدى و x في النطاق تمثل دالة نسميها معكوس f (Inverse) ونرمز لها بالرمز f^{-1} ونطاقها يساوى مدى f ومداهها يساوى نطاق f . يحدث أحياناً أن يكون معكوس الدالة المتصلة الأحادية دالة متصلة. هذا صحيح إذا كان نطاق الدالة مجموعة متراسة في R_n أو بصورة أعم عندما يحقق النطاق خاصية بولزانو - فيرشراس والتي تقول إن كل مجموعة جزئية لانهائية من النطاق لها نقطة نهاية.

والآن نبرهن ماسبق. علينا أن نثبت أن صور المجموعات المفتوحة تكون مفتوحة لأن هذه الأخيرة هي الصورة العكسية للمجموعات المفتوحة تحت الدالة f^{-1} . هذا يكافئ قولنا بأن صور المجموعات المغلقة تكون مغلقة وهذا أسهل بالنسبة لنا هنا.

تمرين (١٤-٣)

اثبت التكافؤ في الجملة السابقة.

لتكن E مجموعة مغلقة في نطاق f ولتكن F صورة E ونخذ y_0 نقطة نهاية للمجموعة F ، علينا أن نبرهن أن $y_0 \in F$. اجعل $\{y_n\}$ متتالية من نقاط F المختلفة بحيث $y_n \rightarrow y_0$ و اجعل $y_n = f(x_n)$. بما أن الدالة أحادية فتوجد x_n وحيدة لكل y_n وكذلك x_n نقاط مختلفة لأن y_n مختلفة. إذن المجموعة المكونة من x_n لها نقطة نهاية x_0 ولذا توجد متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ تؤول إلى x_0 . إذن $x_0 \in E$ لأن E مغلقة. بما أن f متصلة، إذن $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ ولكن $y_{n_k} \rightarrow y_0$ ومنه نجد أن $y_0 = f(x_0) \in F$.

مع أن خاصية القيمة المتوسطة (الجزء ١٣) ليست خاصية مميزة للدوال المتصلة إلا أنها من خواص الدوال المتصلة (إذا تحققت بعض الشروط). أى دالة حقيقية متصلة تحقق خاصية القيمة المتوسطة إذا كان نطاقها مجموعة مترابطة في فضاء مري S . لبرهان ذلك نجعل $f(a) = A$, $f(b) = B$ ونجعل $A < C < B$. نخذ المجموعتين E_1, E_2 في S والمكونة على الترتيب من نقاط S بحيث $f(x) < C$ ونقاط S بحيث $f(x) > C$. هاتان المجموعتان منفصلتان لأن $f(x)$ لا يمكن تكون أقل من C وأكبر من C في نفس الوقت. هاتان المجموعتين غير خاليتين لأن $a \in E_1$ و $b \in E_2$. وهما كذلك مفتوحتان لأنها الصورتان العكسيتان لمجموعتين مفتوحتين. بما أن نطاق f مترابط فهو لايساوى اتحاد مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين ومنفصلتين. إذن نطاق f لا يبد وأن يحتوى على نقطة واحدة c على الأقل لا تنتمى إلى E_1 أو E_2 . القيمة الممكنة لـ $f(c)$ هي C .

لقد رأينا في الجزء ٧ أن الدالة الحقيقية المتصلة والمعرفة على مجموعة مترابطة تأخذ قيمتها الكبرى والصغرى.

تمرين (١٤-٤)

يمكن الحصول على برهان أفضل للجملّة السابقة إذا فرضنا أن أصغر حد علوي M لقيم f ليس قيمة لها ومن ثم فحصنا الكمية $\frac{1}{M - f(x)}$.

تمرين (١٤-٥)

استنتج أنه إذا كان النطاق متراصاً ومترابطاً فإن مدى أى دالة حقيقية ومتصلة يكون فترة محدودة ومغلقة أو نقطة.
التراص ليس ضرورياً لوجود قيمة عظمى.

تمرين (١٤-٥ أ)

خذ الدالة الحقيقية f المتصلة وغير السالبة على النطاق $[a, \infty)$ واجعل $f(x) \rightarrow 0$ عندما $x \rightarrow \infty$. برهن أن f تأخذ قيمتها العظمى على $[a, \infty)$.

تمرين (١٤-٥ ب)

خذ الدالة f كما في التمرين السابق ولكنها موجبة دائماً برهن على وجود متتالية $\{x_n\}$ حيث $x_n \rightarrow \infty$ و $f(x) < f(x_n)$ لجميع $x > x_n$. أى أنه عندما $x \rightarrow \infty$ فإن الدالة f لا تأخذ قيمة كبيرة مثل التى تأخذها عند x_n .

الآن نعطي بعض تطبيقات خاصية القيمة المتوسطة. خذ الدالة الحقيقية f المعرفة على فترة في R_1 والتى تحقق خاصية القيمة المتوسطة على أى فترة من نطاقها وافرض أنها غير متصلة عند النقطة c . باستعمال التمرين (١٣-٦)، نستنتج وجود $\{x_n\}$ نهايتها c بحيث إما $f(x_n) > f(c) + \varepsilon$ حيث ε عدد موجب أو $f(x_n) < f(c) - \varepsilon$ ، ولنفرض الاحتمال الأول. بما أن f تحقق خاصية القيمة المتوسطة على كل فترة فإنها تأخذ كل قيمة بين $f(c)$ و $f(c) + 1/2\varepsilon$. أضف إلى ذلك أنها تفعل ذلك عدد لانهائياً من المرات لأننا نستطيع دائماً أن نختار جواراً أصغر حول c . إذن إذا كانت الدالة المعرفة على فترة من R_1 تحقق خاصية القيمة الوسطى على كل فترة جزئية وهى كذلك

غير متصلة فهي لابد وأن تأخذ بعض القيم عددا لا نهائيا من المرات . (إذن الدالة غير المتصلة والتي تحقق خاصية القيمة المتوسطة والمنشأه في بند ١٣ توضح هذه الحقيقة على أحسن وجه). كما نحصل على النتيجة الآتية : إذا كانت دالة تحقق خاصية القيمة المتوسطة على كل فترة ولا تأخذ أى قيمة أكثر من مرة واحدة فإنها متصلة . إذن فالدالة متصلة إذا أخذت كل قيمة بين $f(a)$ و $f(b)$ مرة واحدة فقط على كل فترة $[a, b]$ في نطاقها^{١٥} .

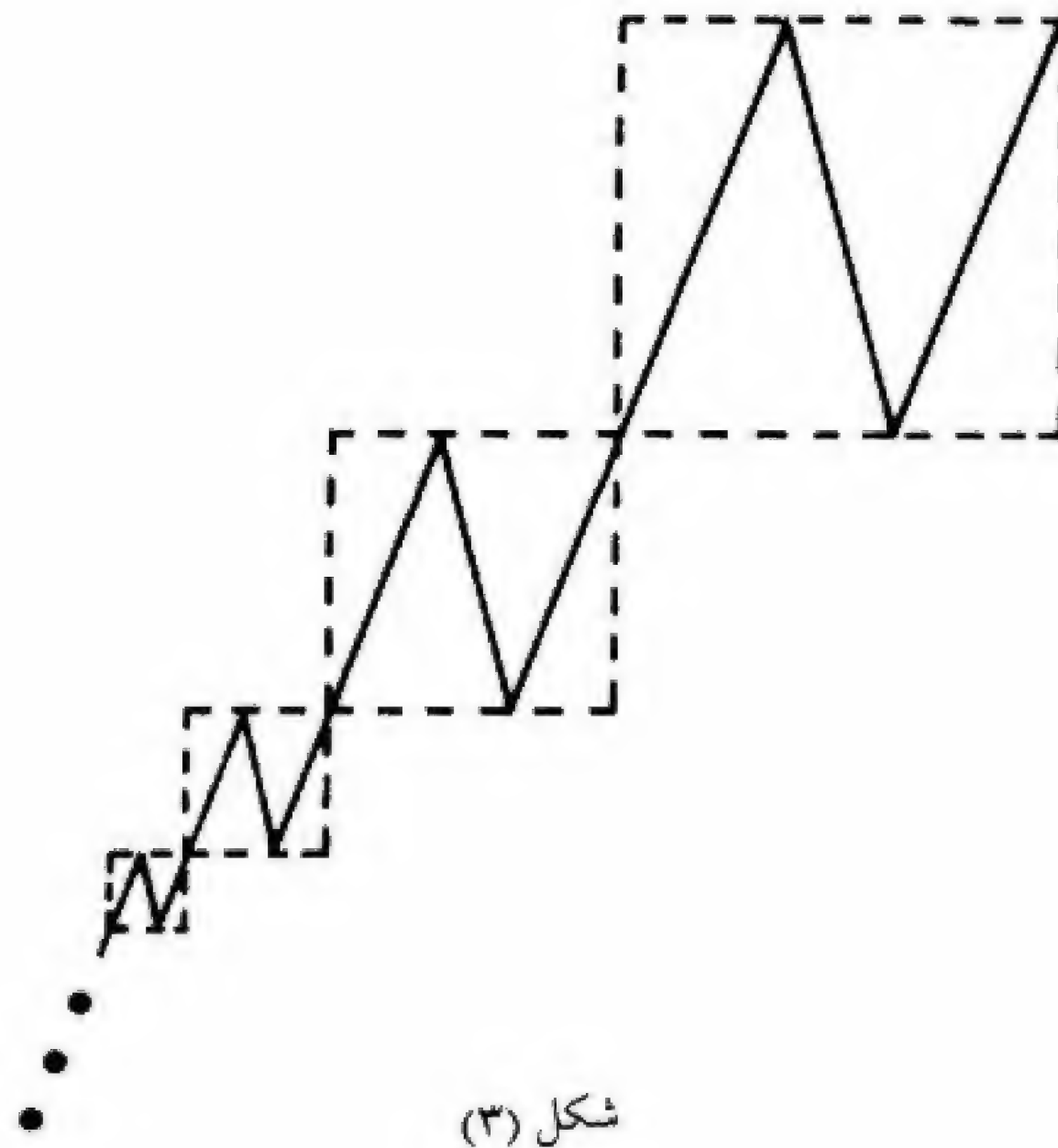
الدالة المطردة الفعلية تعطى مثالا على دالة لا تأخذ أى قيمة أكثر من مرة ولكن ليست جميع الدوال التي تحقق هذه الخاصية مطردة فعلية . (خذ $f(x) = x + 1$ على $-1 < x \leq 0$ و $f(x) = x - 1$ على $0 < x < 1$. ولكن الدالة المتصلة التي لا تأخذ أى قيمة أكثر من مرة واحدة لابد وأن تكون مطردة فعلية . لأنها لو لم تكن مطردة فعلية لوجدنا نقاطا $x_1 < x_2 < x_3$ حيث $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، $f(x_1) \leq f(x_3)$ (أو عكس هذه المتراجحات) ولذا فإن f تأخذ قيمتها العظمى عند نقطة بين x_1 و x_3 (لأن f متصلة) وتصبح القيمة العظمى فعلية (لأن f لا تأخذ أى قيمة أكثر من مرة) . إذا $f(x) < f(c)$ لقيم x على جانبي النقط c ومن خاصية القيمة المتوسطة نجد أن f تأخذ قيمة بالقرب من $f(c)$ مرتين وهذا يناقض الفرضية . (نفس النقاش يثبت أن الدالة المتصلة لابد أن تكون مطردة بين قيمها العظمى والصغرى المتتالية أى أنه إذا كانت f تأخذ قيمتها العظمى عند x_1 وقيمها الصغرى عند x_2 (حيث $x_2 > x_1$) ولا تأخذ قيمة عظمى أو صغرى في الفترة (x_1, x_2) فإن f مطردة في (x_1, x_2) .

لقد برهنا الآن أن الدوال المتصلة على فترة في R_1 والتي تأخذ كل قيمة مرة واحدة على أنها الدوال المطردة الفعلية . ماهى الدوال المتصلة التي تأخذ كل قيمة مرتين فقط؟ الجواب هو أنه لا يوجد مثل هذه الدوال^{١٥} . لنفرض أن f دالة من هذا النوع . بما أنها غير مطردة فهي تأخذ قيمتها العظمى أو الصغرى داخل نطاقها، ولنفرض أنها تأخذ القيمة العظمى . إذن يوجد x_0 بحيث $a < x_0 < b$ و $f(x_0) = M$ و $f(x) < M$ على $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. القيمة M تؤخذ مرتين ، مرة عند x_0 ومرة عند

نقطة أخرى y_0 . أى رسم يوضح أن الدالة f لا بد أن تأخذ قيمة ما M' بحيث $M > M'$ بالقرب من y_0 ومرتين على الجوانب المختلفة للنقطة x_0 وهذا تناقض. البرهان الكامل يعتمد على خاصية القيمة المتوسطة وهو متروك للقارىء.

بما أن الدالة المتصلة f لا يمكن أن تأخذ كل قيمة مرتين فقط، لنفرض الآن أن f تأخذ كل قيمة مرتين على الأكثر. في هذه الحالة نستطيع القول بأن منحنى f يتكون من ثلاثة أجزاء مطردة على الأكثر^(١٥) (مثل المنحنى في شكل رقم ٣ بعد حذف قطعه من أحد طرفيه).

يجدر بنا هنا ملاحظة عدم وجود حقيقة مماثلة للدوال المتصلة التى تأخذ كل قيمة ثلاث مرات على الأكثر ومنحنى هذه الدالة قد لا يتألف من عدد نهائى من القطع المطردة^(١٥)، كما في شكل (٣) حيث إن ضلع المربع النوني من اليمين يساوى a_n و $\sum a_n < \infty$.



لنفرض أن f متصلة على $[a, b]$ وتأخذ كل قيمه مرتين على الأكثر. مما سبق نرى أن f مطردة بين أى قيم عظمى وصغرى متتالية. فإذا كانت القيم العظمى والصغرى للدالة f عند الأطراف فقط فإن f مطردة. إذا لم تكن مطردة فلا بد أن يكون لها قيمة عظمى أو صغرى داخل نطاقها ولتكن قيمة عظمى عند c . إذا لم يوجد قيم عظمى

أو صغرى داخلية فإن الدالة مطردة على (a, c) و (c, b) . الحالة التالية هي التى يكون للدالة f قيمة عظمى داخلية واحدة عند c_1 . وقيمة صغرى داخلية عند c_2 مثل $a < c_1 < c_2 < b$. إذن f مطردة على كل من الفترات الثلاث (a, c_1) , (c_1, c_2) , (c_2, b) . أخيراً لنفرض أن عدد القيم العظمى والصغرى الداخلية للدالة f أكثر من اثنين. لنفرض أن f تأخذ قيمة عظمى وقيمة صغرى وقيمة عظمى (ليست متتالية بالضرورة) عند النقاط c_1, c_2, c_3 حيث $c_1 < c_2 < c_3$ و $f(c_1) > f(c_2)$ و $f(c_2) > f(c_3)$ ولنفرض كذلك أن $f(c_1) \geq f(c_3)$. إذن f تأخذ قيمة أقل بقليل من $f(c_3)$ مرتين على الأقل؛ إذا كانت هذه القيمة أكبر من $f(c_2)$ فإنها ستكون أقل من $f(c_1)$ ومن خاصية القيمة المتوسطة نستنتج أنها ستؤخذ مرة أخرى بين c_1 و c_2 ثلاث مرات وهذا يناقض الفرضية.

سنعطى الآن تطبيقاً آخر لخاصية القيمة المتوسطة. لتكن f دالة متصلة من فترة R_1 إلى R_1 . نقول إن للدالة وترأ أفقياً طوله a إذا وجدت نقطة x بحيث أن x و $x + a$ في نطاق f و $f(x) = f(x + a)$. هذا يعنى وجود قطعة مستقيمة أفقية طولها a طرفها على منحنى الدالة ولا يهمننا ما إذا كانت القطعة تشترك مع المنحنى في نقاط أخرى. فمثلاً إذا كانت $f(x) = 1$ لكل x فإن لها أوتار أفقية من جميع الأطوال، القطعة من $(-1, 1)$ إلى $(1, 1)$ تمثل وتر أفقى طوله 2 للدالة $f(x) = x^3 - x + 1$ ، بينما الدالة $f(x) = x^3$ ليس لها أوتاراً أفقية على الإطلاق.

نقول إن الدالة f المعرف على R_1 دورية (Periodic) ودورتها P إذا كانت $f(x + p) = f(x)$ لكل x .

تمرين (٦-١٤)

اثبت أن الدالة المتصلة الدورية تكون محدودة.

تمرين (٧-١٤)

برهن أن للدالة الدورية المتصلة قيمه عظمى.

تمرين (٨-١٤)

برهن أنه إذا كانت f متصلة ودورتها p فإن قيمة التكامل $\int_x^{x+p} f(t)dt$ مستقلة عن x .
 نلاحظ أولاً أن للدالة الدورية المستمرة أوتاراً أفقية من جميع الأطوال، أي أنه إذا كانت دورة f تساوي p وكان a أي عدد حقيقي فإنه توجد x بحيث $f(x+a) - f(x) = 0$. لإثبات ذلك لنأخذ الكمية

$$\int_0^p [f(x+a) - f(x)]dx$$

والتي تساوي صفر (راجع تمرين «٨-١٤»). إذاً المكامل (Integrand) لا بد وأن يغير إشارته (إلا إذا كان مساوياً تماماً للصفر وفي هذه الحالة يكون $f(x+a) = f(x)$ وهو المطلوب). لكن دورة المكامل تساوي p وإذا كان يغير الإشارة مرة في الدورة فلا بد وأن يغيرها على الأقل مرتين ليحصل عند p على القيمة ذاتها وعند الصفر إلا إذا كان صفراً عند الصفر في البداية. لذلك يوجد على الأقل نقطتان x في $[0, p)$ يحققان $f(x+a) = f(x)$ ولذا نستنتج أن للدالة المستمرة التي دورتها p وترين أفقيين بأي طول معطى بحيث أن أطرافهما اليسرى تقعان في $[0, p)$ (١٥).

تمرين (٩-١٤)

اثبت أنه لأي دالة مستمرة ودورية وتر (ليس بالضرورة أفقياً) بأي طول معطى ومنتصفه يقع على منحنى الدالة، أي أنه لكل a توجد x بحيث

$$f(x+a) - f(x) = f(x) - f(x-a).$$

الوضع يختلف تماماً بالنسبة للدوال غير الدورية، فإذا كانت f دالة مستمرة على $[0, 1]$ فربما لا يوجد لها أي وتر أفقي على الإطلاق. على كل حال لنفترض أن لها وتراً أفقياً واحداً، على وجه الخصوص لنفترض أن $f(0) = f(1)$ ، لذا فالقطة المستقيمة $(0, 1)$ تكون هي الوتر الأفقي. نظرية الوتر الشاملة^(١٦) تنص على أنه توجد أوتار أفقية أطوالها $1/2, 1/3, 1/4, \dots$ ولكن ليس للدالة بالضرورة وتر أفقي بأي طول لا يساوي مقلوب عدد طبيعي.

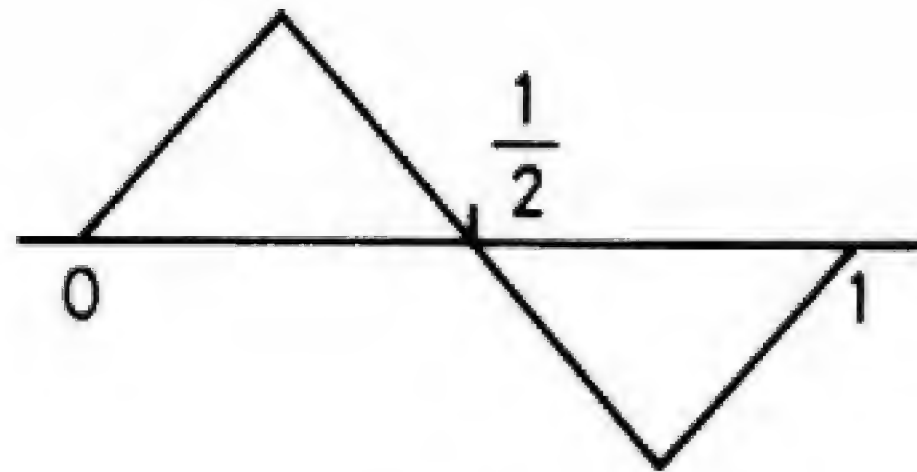
لإثبات هذه النظرية لنفترض أن k عدد صحيح موجب ونعتبر الدالة المستمرة g والمعرفة كالتالي: $g(x) = f(x + 1/k) - f(x)$ على $[0, 1 - 1/k]$ النظرية السابقة تؤكد لنا أن الصفر يوجد ضمن مدى g . لو لم تكن هذه هي الحالة فإن g سوف تكون إما موجبة لجميع قيم x التي تنتمي إلى نطاقها أو سالبة لجميع قيم x التي تنتمي إلى نطاقها (ذلك يعزى إلى خاصية القيمة المتوسطة). لذلك فإن $g(0) + g(1/k) + g(2/k) + \dots + g(1 - 1/k)$ المجموع بعد الاختصار يساوي $f(1) - f(0) = 0$.

الطريقة الأخرى لإثبات هذه النظرية إنه لو افترضنا أن $g(x) > 0$ لجميع قيم x ، أى أنه لو افترضنا أن $f(x) < f(x + 1/k)$ لجميع قيم x لحصلنا على.

$$f(0) < f(1/k) < f(2/k) < \dots < f\left(\frac{k-1}{k}\right) < f\left(\frac{k}{k}\right) = f(1) = f(0).$$

وهذا غير ممكن.

المنحنى التالي يبين دالة f لها وتر أفقي طوله 1 لكن ليس لها أي وتر أفقي بطول a حيث $1/2 < a < 1$. أيضاً أي دالة من هذا النوع لها أوتار أفقية ذات أطوال ليست مقلوب أعداد طبيعية، لكن الجزء الأخير من نظرية الوتر الشاملة يؤكد لنا بأنه لكل عدد b ليس مقلوب عدد طبيعي يوجد دالة مستمرة بوتر أفقي طوله 1 ولكن ليس لها وتر أفقي بذلك الطول b كما في شكل (٤).



شكل (٤)

تمرين (١٤-١٠)

بين كيفية إعطاء أمثال توضح الجزء الأخير من نظرية الوتر الشاملة لكل $b \neq 1/k$ (التناظر في المثال السابق للقيم $1/2 < b < 1$ يعطى فكرة خاطئة).

الجزء المدهش والمكمل لنظرية الوتر الشاملة^(١٧) ينص على أن الدالة المستمرة التي لها وتر أفقي بطول 1 لها دائماً إما وتر أفقي بطول a أو اثنين مختلفين بطول $1 - a$ (إذا كانت $0 < a < 1$). لرؤية ذلك لنفترض أن $f(0) = f(1)$ وتكون الدالة جديدة g عن طريق تكرار f بدورة مقدارها 1. كدالة دورية مستمرة لا بد وأن يكون لـ g وتران أفقيان كل واحد بطول a وأطرافهما من اليسار في $[0, 1]$ راجع بند ١٤. الوتر الأفقي للدالة بطول a والمبتدئ من x هو أيضاً وتر أفقي للدالة f إلا إذا كان $x + a < 1$ وفي هذه الحالة يكون $0 < x + a - 1 < 1$ ولذلك فإن الوتر الأفقي بطول $1 - a$ للدالة g (كذلك للدالة f) يبدأ من $x + a - 1$ وينتهي عند x .

تمرين (١١-١٤)

اثبت نظرية الوتر الشاملة بالاستقراء الرياضي مبتداءً بالحقيقة التالية: إذا كان $f(0) = f(1)$ فإن للدالة f وترًا أفقيًا إما بطول a أو بطول $1 - a$.

بنفس الطريقة يمكننا إثبات أنه إذا كانت f' هي مشتقة f في $[0, 1]$ و $f'(0) = f'(1)$ فإنه لكل عدد صحيح n توجد نقطتان $x, x + 1/n$ بحيث يكون للدالة f نفس الميل عند كلتي النقطتين. هذا يعتمد على الحقيقة راجع بند ٢١ التي تنص على أن المشتقة تحقق خاصية القيمة المتوسطة، وهذه الخاصية (للدالة g وليس فقط للدالة f) هي كل ما استخدم لإثبات نظرية الوتر الشاملة.

تطبيق آخر لنفس الفكرة السابقة يزودنا بإثبات سهل لنظرية النقطة الثابتة والتي تقول إن للدالة المستمرة التي نطاقها ومداها نفس الفترة نقطة ثابتة على الأقل أى أنه يوجد نقطة واحدة على الأقل تتساوى مع صورتها. بالإمكان صياغة هذه النظرية كالتالي.

إذا كانت f مستمرة ومعروفة على $(0, 1)$ بحيث $0 \leq f(x) \leq 1$ ، فإن منحنى الدالة لا بد وأن يقطع المستقيم $y = x$.

تمرين (١٤-١٢)

اثبت الجملة السابقة : اثبت أنه إذا كانت f مستمرة ومعرفة على $[a, b]$ وتأخذ جميع قيمها في $[a, b]$ فإنه توجد x في $[a, b]$ بحيث $f(x) = x$.

هناك نظرية أخرى لها علاقة قريبة بما سبق تنص على أنه إذا كانت f مستمرة ودورية (دورتها $2p$) وإذا كانت $f(x) = -f(x + p)$ لجميع قيم x (مثل منحنى الدالة $g = \sin(x)$ حيث $p = \pi$) فإن $f(x) = 0$ عند قيمة واحدة لـ x على الأقل. هذا واضح جداً من نظرية القيمة المتوسطة. ولكن إذا صيغت الجملة السابقة بطريقة مختلفة فإنها تصبح حالة سهلة من نظرية بورزك (Borsuke) للنقطة المعاكسة والتي من الصعب إثباتها في حالة الأبعاد العالية (Higher dimensions): ^{١٨}.

لنفرض أن f مستمرة نطاقها محيط دائرة في R_2 ومجالها في R_1 ولنفرض أن صورة أى زوج من النقاط المتعاكسة (أى النقطتان التى على طرفي قطر) هى زوج من النقاط المتماثلة بالنسبة لنقطة الأصل فإنه توجد نقطة على المحيط صورتها نقطة الأصل. يوجد تطبيق آخر لنظرية القيمة المتوسطة يبين أنه بالإمكان تنصيف فطيرة محلاة في بعدين ذات شكل اختياري عن طريق قطعها بسكين في أى اتجاه معين، على الأقل إذا كانت حدود الفطيرة بسيطة للغاية. فمن السهل أن نرى أن للجزء من الفطيرة في أحد الجانبين من خط يقطعها في ذلك الاتجاه مساحة تتغير بصورة مستمرة كلما تحرك الخط موازياً لنفسه. بما أن هذه المساحة ربما تكون إما صفراً أو مساوية للمساحة الكلية للفطيرة فلا بد وأن يأتي وقت تكون فيه مساوية تماماً للنصف.

الآن نبين كيفية تنصيف فطيرتين في المستوى في آن واحد بنفس المستقيم. لنفترض أن الفطيرتين هما A و B . اوجد خط ينصف B في أى اتجاه معين ماراً بنقطة ما p على دائرة في R_2 مركزها 0 وليكن $f(p)$ يمثل الفرق (مأخوذة الإشارة بعين الاعتبار) بين مساحة الجزء من A الواقع يسار هذا الخط ومساحة الجزء الواقع يمينه. نطاق هذه الدالة محيط دائرة ومداهما في R_1 وصورة النقاط المتعاكسة هى نقاط متماثلة حول 0 لأن تبديل p بالنقطة المعاكسة ينتج عنه استبدال اليمين باليسار. لو استطعنا إثبات أن F مستمرة فإن الحالة الخاصة من نظرية بورزك أعلاه تبين أن $f(p) = 0$ لنقطة ما p وبالتالي فإن الخط في الاتجاه OP ينصف كلاً من A و B في آن

واحد. كون f مستمرة ليس واضحاً جداً لكنه على كل حال ممكن.

نلاحظ أنه يكفي أن نثبت أن أى تغيير طفيف في وضع p ينتج عنه ليس فقط تغيير طفيف في اتجاه الخط المنصف لـ B ولكن أيضاً تغيير طفيف في موضعه على سبيل المثال عند تقاطعه مع أحد الإحداثيات. لأنه لو كان ذلك صحيحاً فإن $f(p)$ سوف يتغير بمقدار طفيف. الكلام السابق عن الخطوط المنصفة لـ B صحيح بدون تحفظ إذا وضعنا فقط شرط على الشكل المسموح به للفطيرة، على سبيل المثال الفطيرة التى على شكل $\bigcirc - \bigcirc$ بالإمكان تنصيفها بعدة خطوط عمودية إذا حصرنا اهتمامنا بالفطيرة المحدبة (Convex) فهذه المشكلة تزول كما يتضح من الرسم.

تمرين (١٤-١٣)

اثبت أنه إذا أعطينا منحنى محدب مغلق في المستوى فإنه بالإمكان إيجاد خط ينصف المنحنى والمساحة التي بداخلها في نفس الوقت^(١٩).

توجد نظريات مشابهة في أبعاد أعلى لكنها صعبة الإثبات. بالإمكان صياغة نظرية النقطة الثابتة في ثلاثة أبعاد كالتالى: إذا حرك كوب من القهوة بصورة مستمرة فإنه يوجد على الأقل جزئ واحد يعود إلى موضعه الأصلي. (هذا صحيح إذا افترضنا فقط أن القهوة تحتل كل نقطة بداخل الكوب وأن الجزئ عبارة عن نقطة). كذلك نظرية النقطة المعاكسة في أبعاد تنص على أن الدالة المستمرة التي نطاقها سطح كرة ومداها في R_2 بحيث أن صورة كل زوج من النقاط المتعاكسة هي نقاط متماثلة حول نقطة الأصل لا بد أن ترسل نقطة ما على السطح إلى نقطة الأصل. بالإمكان استخدام هذه النظرية لإثبات أنه باستطاعتنا تنصيف ثلاثة حجومات أنياً بواسطة مستوى (هذه نظرية الشطيرة)^(٢٠).

١٥ - النهايات العظمى والصغرى (Upper and lower limits)

سوف نحتاج إلى تعميم فكرة نهاية متتالية من الأعداد الحقيقية. إذا كانت $\{S_n\}$ تمثل متتالية بحيث إن الأعداد S_n تكون مجموعة محدودة فسنبين أنه يوجد دائماً عدد حقيقى

L يحقق الخاصية التالية : إذا أعطينا ϵ موجب فإن $S_n \leq L + \epsilon$ عندما تكون n كبيرة بدرجة كافية بالإضافة أنه يوجد عدد لانهائي من الـ S_n يحقق $S_n \geq L - \epsilon$. هذا العدد يسمى النهاية العظمى لـ $\{s_n\}$ ويكتب على الصورة $\limsup s_n$ أو $\overline{\lim} s_n$. إذا كانت S_n غير محدودة من أعلى فإننا نكتب $\limsup s_n = +\infty$ وإذا كانت s_n غير محدودة من أسفل فربما يتعذر وجود L وفي هذه الحالة نكتب $\limsup s_n = -\infty$.

لنأخذ بعض الأمثلة :

(١) لنفرض أن $S_n = (-1)^n$ لذلك فإن المتتالية هي $1, -1, 1, -1, \dots$ وبالتالي $\limsup s_n = 1$.

(٢) لنفترض أن $s_n = n$ أي أن المتتالية هي $1, 2, 3, \dots$ وبالتالي $\overline{\lim} s_n = +\infty$.

(٣) لنفترض أن $S_n = \{-1, -2, \dots\}$ فإن $\overline{\lim} S_n = -\infty$.

(٤) لنفترض أن $S_n = 1/n$ حيث $n = 1, 2, \dots$ في هذه الحالة $\overline{\lim} s_n = \lim S_n = 0$.

(٥) لنفترض أن $S_n = \{1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, \dots\}$ فإن $\lim S_n = 1$.

تمرين (١٥-١)

على افتراض أن الأعداد L_n معرفة كالتالي $L_n = \sup s_k$ لكل $K \geq n$. اثبت أن $\limsup s_n$ موجود إذا كانت $\{S_n\}$ محدودة .

تمرين (١٥-٢)

عرف النهاية الصغرى ($\underline{\lim}$) أو (\liminf) بطريقة . مشابهة وعينها للأمثلة الخمسة السابقة والمعطاة للنهاية العظمى .

إن تعريف النهاية العظمى يتشابه مع نظيره تعريف أصغر حد أعلى فيما عدا إن المجموعات الجزئية المنتهية من العناصر S_n بالإمكان التغاضي عنها . على سبيل المثال قيمة $\overline{\lim} s_n$ لا تتغير إذا استبدلنا أول ألف عنصر S_n بغيرها من الأعداد . كذلك باستطاعتنا تعريف $\underline{\lim} S_n$ على أنه أكبر نهاية تحصل عليها عن طريق اختيار متتاليات جزئية متقاربة من $\{S_n\}$. هذه التسمية تعزي لهذا التعريف بالذات .

نلاحظ أنه $\overline{\lim} (S_n + t_n) \leq \overline{\lim} S_n + \overline{\lim} t_n$ عندما تكون كلتا الكميتين في الطرف الأيمن محدودتين، لكن ربما نحصل على متراجحة صارمه كما في المثال التالي : إذا كانت $S_n = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$ و $t_n = \{0, 1, 0, 1, \dots\}$ على كل حال فإنه في حالة وجود $\overline{\lim} t_n$ فإن .

$$\overline{\lim} (S_n + t_n) = \overline{\lim} S_n + \overline{\lim} t_n.$$

تمرين (١٥-٣)

اثبت صحة المتراجحة والمساواة المذكورتين أعلاه .

بالإمكان تعميم المتراجحة السابقة إلى مجاميع منتهية ولكن ليس إلى مجاميع غير منتهية على سبيل المثال إذا كان S_k يمثل المتتالية $\{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$ التي عناصرها $S_{k,n}$ تساوي الصفر فيما عدا العنصر $S_{k,k}$ فهو 1، في هذه الحالة (عندما $n \rightarrow \infty$) فإن $\overline{\lim} (S_{1,n} + S_{2,n} + \dots) = \overline{\lim} 1 = 1$ بينما $\overline{\lim} S_{k,n} = 0$ لكل k .

بالإمكان أيضا تعريف النهايات العظمى والصغرى للدوال التي مداها في R_1 ونطاقها فضاء أعم من ذلك . إذا كان نطاق f مجموعة S في فضاء متري وكانت x_0 نقطة نهاية لـ S فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ يعنى أنه إذا أعطينا ϵ موجب فإن $f(x) \leq L + \epsilon$ لكل x في جوار صغير بقدر كاف مركزه x_0 ، بالإضافة إلى أنه توجد متتالية من النقاط $\{x_n\}$ نهايتها x_0 بحيث $f(x_n) \geq L - \epsilon$. تجدر الإشارة إلى أننا نحتاج إلى بعض التغيرات الطفيفة إذا كان $L = \pm \infty$. بطريقة مشابهة يمكن تعريف $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ إذا كان نطاق مجموعة جزئية من R_1 غير محدودة من أعلى . هذه بعض الأمثلة :

(١) إذا كان $f(x) = \sin x$ لكل $x \in R_1$ فإن $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$ و

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

(٢) إذا كان $f(x) = e^x \sin x$ لكل $x > 0$ فإن $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

(٣) إذا كان $f(x) = e^{1/x}$ لكل $x \neq 0$ فإن $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ و

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

تمرين (١٥-٤)

اثبت أنه إذا كان $\lim s_n = L$ وكانت L عدداً نهائياً فإن $\lim s_n = L$ حسب التعريف المعطى في البند (٨).

على الرغم من تطرقنا إلى موضوع نهايات المتتاليات إلا أننا لم نتطرق بعد إلى نهايات الدوال بشكل عام. من السهل أن نعرف $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ للدوال التي مجالها في R_1 على أنه القيمة المشتركة لـ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. وإذا كان نطاق f يحتوى على جوار من اليمين للنقطة x_0 تعرف $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ على أنه النهاية العظمى لتخصيص f (Restriction) لجوار من اليمين حول النقطة x_0 ، وبطريقة مشابهة نعرف $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ القيمة المشتركة (إذا وجدت) لهذه النهايات العظمى والصغرى من اليمين تكتب بالشكل $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ أو $f(x_0 +)$. كذلك يوجد تعريف مشابه لـ $f(x_0 -)$.

١٦ - متتاليات من الدوال (Sequences of Functions)

قبل أن نبدأ بمناقشة بعض الخواص المعينة لفئات من الدوال من المستحسن أن نناقش أولاً عدة أنواع من التقارب لمتتاليات من الدوال.

لنفرض أن S_n تمثل متتالية عناصرها دوال ذات نطاق مشترك وتأخذ نطاق مشترك وتأخذ قيمها $S_n(x)$ في R_1 . الآن أمامنا خياران إما أن نركز اهتمامنا على المتتالية $\{S_n\}$ التي عناصرها الدوال ذاتها أو على المتتالية $\{s_n(x)\}$ التي عناصرها قيم هذه الدوال عند النقاط x في النطاق المشترك. نقول إن $s_n(x)$ تتقارب نقطياً على مجموعة S إذا كانت المتتاليات $\{S_x(x)\}$ من الأعداد الحقيقية تتقارب لكل x في S . فمثلاً لنفرض أن $s_n(x) = x^n$ حيث $0 \leq x \leq 1$ ، فإن لكل x في $[0, 1]$ في المتتالية $\{s_n(x)\}$ متقاربة، النهاية هي الدالة غير المتصلة L حيث $L(x) = 0$ إذا كانت $0 \leq x < 1$ و $L(1) = 1$. من جهة أخرى إذا اعتبرنا نفس الدوال s_n كنقاط في الفضاء C فإن المتتالية $\{s_n\}$ غير متقاربة في الواقع $d(s_n, s_{2n}) = \max_{0 \leq x \leq 1} (x^n - x^{2n})$. وإذا أخذنا $x = 2^{-1/n}$ فإن $d(s_n, s_{2n}) \geq x^n - x^{2n} = 1/4$. لذلك $\{S_n\}$ لا يمكن أن تكون متتالية كوشي (Cauchy).

تمرين (١٦-١)

اختبر تقارب $\{S_n\}$ في C إذا كان (أ) $s_n(x) = x^n(1 - x)$.

(ب) $S_n(x) = nx^n(1 - x)$ ، حيث في كلتا الحالتين $0 \leq x \leq 1$.

لقد رأينا كيف أن متتالية من الدوال المستمرة تتقارب نقطياً على الرغم أنها نفسها إذا اعتبرناها كعناصر في الفضاء C لا تتقارب. من الواضح أن تقارب متتالية عناصرها في C يقتضي التقارب النقطي لتلك المتتالية من الدوال، على كل حال يوجد فضاءات مترية عناصرها دوال لا يؤدي تقارب متتالية من عناصرها إلى التقارب النقطي. المثال على ذلك هو المعطى في بند (٤) والذي عناصره دوال مستمرة في $[0, 1]$ والمسافة بين أي عنصرين هي $d(x, y) = \left\{ \int_0^1 |x(t) - y(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$. لنأخذ متتالية عناصرها في هذا الفضاء ومعرفة كالتالي: إذا كانت $2^n \leq k < 2^{n+1}$ فإن $x_k(t) = 0$. وفي الفترة $(2^{-n}k - 1, 2^{-n}(k + 1) - 1)$ منحنى الدالة عبارة عن مثلث طول قاعدته 2^{-n} وارتفاعه 1؛ هذا المثلث يتحرك للأمام والخلف كلما ازدادت قيمة k وهذا يحول دون التقارب النقطي على الرغم من كون $d(x_k, 0) < 2^{-n/2} \rightarrow 0$.

بالإمكان تعريف النهاية النقطية العظمى والصغرى $\lim s_n(x)$ ، $\overline{\lim} s_n(x)$ لمتتالية من الدوال s_n ذات النطاق المشترك ومداها في R_1 سواء كانت هذه المتتالية متقاربة نقطياً أم خلاف ذلك. إذا كانت تلك النهايتين محدودتين فإنهما يعرفان لنا دالتين نسميهما $\lim \sup s_n(x)$ و $\lim \inf s_n(x)$.

في معظم الأحيان من الأفضل أن نعمم فضاء الدوال المستمرة C عن طريق اعتبار الدوال المستمرة التي نطاقها مجموعات أعم من مجرد فترات في R_1 . عند تعريف C لقد استخدمنا فكرة وجود قيمة عظمى للدالة التي نطاقها فترة متراصة وبما أن ذلك أيضاً صحيح إذا استبدلنا النطاق ليكون مجموعة متراصة فإنه بالإمكان استخدام نفس التعريف: لنفرض أن E مجموعة متراصة في فضاء متري، إذن الفضاء C_E يتكون من الدوال المستمرة التي نطاقها E ومداها في R_1 بحيث $d(f, g) = \max_E |f(x) - g(x)|$ ، وبطريقة مشابهة بالإمكان تعريف فضاء الدوال المحدوده B_E التي نطاقها E وذلك باعتبار $d(f, g) = \sup_E |f(x) - g(x)|$ في هذه الحالة E ليست بالضرورة متراصة.

إذا أخذنا متتالية من الدوال المستمرة المتقاربة (على أساس أن عناصرها تنتمي إلى C_E فإننا نقول إنها متقاربة بانتظام في E . بشكل أعم لنفترض أن لدينا متتالية من الدوال (سواء كانت محدودة أو غير محدودة، مستمرة أو غير مستمرة)، إذا كان الفرق بين (أي دالتين محدود فباستطاعتنا تكوين المسافة بينهما في B_E ، وإذا كانت هذه المتتالية (من الدوال) كوشي حسب هذه المسافة، فإننا نقول إنها متقاربة بانتظام في E . مثلاً إذا كانت $f(x) = 1/x$ فإن المتتالية $\{f, f, \dots\}$ متقاربة بانتظام في الفترة $0 < x \leq 1$ ، أيضاً المتتالية $\{S_n\}$ حيث $S_n(x) = x^n$ متقاربة بانتظام في أى فترة معينة $[0, a]$ حيث $0 < a < 1$. ولكن ليس في $[0, 1]$ ، كذلك نلاحظ أنها غير متقاربة بانتظام في الفترة النصف مغلقة $(0, 1)$. لذلك من المهم أن ندرك أن التقارب المنتظم في كل فترة جزئية معلقة من فترة مفتوحة يختلف عن التقارب المنتظم في الفترة المفتوحة .

الطريقة الأخرى السائدة للتعبير عن التقارب المنتظم لمتتالية $\{S_n\}$ في E هو أن نقول لكل ϵ موجب يوجد عدد طبيعى N بحيث إذا كانت n و m أكبر من N فإن $|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon$ لجميع قيم x في E . يجب ملاحظة أن N لا تعتمد على النقطة x التي نأخذها في E . فإذا سمحنا لـ N أن تعتمد على x في هذه الحالة نحصل على تعريف التقارب النقطي مرة أخرى .

الآن لنفترض أنه بإمكاننا إيجاد أعداد M_n بحيث $|S_n(x) - S_{n+1}(x)| \leq M_n$ لجميع قيم x في E ، أي أن: $\sup_{x \in E} |S_n(x) - S_{n+1}(x)| \leq M_n$ ، وإذا كانت $\sum M_n$ متقاربة فإن المتتالية $\{S_n\}$ تتقارب بانتظام في E . لأنه إذا كانت $m > n$ فإن $|S_n(x) - S_m(x)| \leq M_n + M_{n+1} + \dots + M_m$ والمجموع في الجهة اليمنى صغير بالقدر الذى نرغبه في حالة كون m و n كبيرة بقدر كافٍ . هذا يسمى باختبار فيرشراس (Weierstrass M-test) وعادة يذكر بالصيغة التالية إذا كانت C_n دوال نطاقها E و $|C_n(x)| \leq M_n$ لجميع قيم x في E (ننوه هنا أن M_n مستقلة عن المتغير x) فإن $\sum C_n$ تتقارب بانتظام إذا كانت السلسلة $\sum M_n$ متقاربة .

نستخدم في معظم الأحيان نوعاً آخر من التقارب: التقارب النقطي بالإضافة إلى المحدودية المنتظمة (Uniform boundedness) أي المحدودة حسب مسافة B_E

نسمى ذلك التقارب المحدود (Bounded convergence). على سبيل المثال المتتالية $\{S_n\}$ حيث $S_n(x) = x^n$ متقاربة محدودة في $[0, 1]$ على الرغم من كونها متقاربة بانتظام فقط في كل فترة $[0, a]$ حيث $0 < a < 1$. إذا كانت $S_n(x) = n x^n$ فالمتتالية $\{S_n\}$ لا تزال متقاربة بانتظام في كل فترة $[0, a]$ حيث $0 < a < 1$ ، لكنها غير متقاربة محدودة في $[0, 1)$.

تمرين (١٦-٢)

اثبت أن نهاية متتالية (من الدوال) متقاربة محدودة تكون محدودة.

١٧ - التقارب المنتظم

إن أهم استعمالات التقارب المنتظم تكمن في أن نهاية متتالية متقاربة بانتظام من الدوال المستمرة تكون مستمرة. بالإمكان ذكر الحقيقة السابقة بدقة أكثر وذلك بالقول إن الفضاء C_E كامل (Complete). إثبات ذلك ليس بالصعب وفي الحقيقة سوف نثبت حقيقة أعم قليلاً من ذلك ومفيدة في بعض الأحيان: إذا كانت كل S_n مستمرة عند x_1 وكانت $\{S_n\}$ متقاربة بانتظام في جوار للنقطة x_1 . أولاً نلاحظ كما ذكرنا سابقاً أن التقارب المنتظم يقتضى التقارب النقطي، لذا فالدالة L موجودة لنفرض أن D تمثل دالة المسافة في الفضاء B_E . لذلك كل ϵ موجب فإن.

$$\begin{aligned} |L(x_1) - L(x_2)| &\leq |L(x_1) - S_n(x_1)| + |L(x_2) - S_n(x_2)| + |S_n(x_1) - S_n(x_2)| \\ &\leq D(L, S_n) + D(L, S_n) + |S_n(x_1) - S_n(x_2)|. \end{aligned}$$

بالإمكان جعل أول حدين في الجهة اليمنى أقل من $\epsilon/3$ وذلك باختيار n كبيرة بقدر كافٍ، لأن $\{S_n\}$ متقاربة بانتظام بعد هذا الاختيار للعدد n نثبت. بما أن كل S_n مستمرة عند x_1 فإن الحد الأخير (في الجهة اليمنى) لا يزيد عن $\epsilon/3$ إذا $d(x_1, x_2) < \delta$. يقتضى $|L(x_1) - L(x_2)| < \epsilon$ وبالتالي L مستمرة عند x_1 .

بالطبع نهاية متتالية متقاربة بغير انتظام من الدوال المستمرة قد تكون دالة مستمرة. على سبيل المثال المتتالية $\{S_n\}$ حيث $S_n(x) = n x^n(1 - x)$ متقاربة بغير

انتظام ولكن نهايتها الدالة المستمرة 0 . ولكن تحت شروط إضافية من الممكن استنتاج أن التقارب منتظم إذا كانت النهاية دالة مستمرة . مثلاً إذا كانت متتالية من الدوال المستمرة تتقارب باطراد (Monotonically) إلى دالة مستمرة في فترة متراسة من R_1 فإن التقارب لا بد وأن يكون منتظماً^(٢١) ؟ الافتراض أن التقارب مطرد يعنى إما $S_n(x) \leq S_{n+1}(x)$ أو $S_n(x) \geq S_{n+1}(x)$ لكل n ولجميع قيم x في الفترة .

لنفترض أن $S_n(x) \geq S_{n+1}(x)$ وإذا رمزنا للنهاية بـ L فإن $S_n(x) - L(x) \geq 0$. إذا كان التقارب غير منتظم فإن $\max_x [S_n(x) - L(x)]$ لا يقترب من الصفر وبالتالي توجد متتالية من الأعداد n حيث $\max_x [S_n(x) - L(x)] > b > 0$. بما أن $S_n - L$ دالة مستمرة فهي تأخذ قيمتها العظمى عند نقطة x_n . باستخدام تمرين (٨-٨) نستطيع اختيار متتالية $\{y_k\}$ من المجموعة $\{X_n\}$ نهايتها Z . لذا فإن $S_k(y_k) - L(y_k) > b$ وبالتالي $S_n(y_k) - L(y_k) > b$ لكل $n < k$ (في هذه الخطوة فقط استعملنا المتراجحة $(S_n(x) \geq S_{n+1}(x))$. دع $k \rightarrow \infty$ حيث n ثابتة لكي نحصل على $S_n(Z) - L(Z) \geq b$ لكل قيم n وذلك لأن $S_n - L$ دالة مستمرة . من جهة أخرى $S_n(Z) - L(Z) \rightarrow 0$ لأن المتتالية متقاربة عند النقطة Z ، لذلك فافتراض أن التقارب غير منتظم يؤدي إلى تناقض .

يوجد شرط آخر يؤدي إلى نفس النتيجة وهو أن الدوال S_n تكون مطردة (الاستمرار ليس ضرورياً) . بدقة أكثر دع $S_n \rightarrow L$ نقطياً في الفترة المتراسة $[a, b]$ ولنفترض أن L مستمرة وأن جميع الدوال S_n غير تناقصية فإن $S_n \rightarrow L$ بانتظام . اثبات هذه النظرية يتطلب بعض الحقائق من أجزاء قادمة ولكن لمناسبتها في هذا المقام فسنبثها الآن . لنفرض أن ϵ عدد موجب ونختار مجموعة منتهية من النقاط x_k في $[a, b]$ بحيث $a = x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$ و $0 \leq L(x_k) - L(x_{k-1}) < \epsilon$ لكل $k = 2, 3, \dots, m$. بما أن L مستمرة بانتظام (راجع بند ١٩) وغير تناقصية فإن المتراجحات تبقى صحيحة إذا كانت المسافة بين أى نقطتين x_k متتاليتين صغيرة بقدر كاف . بالإضافة إلى ذلك فإن $0 \leq L(x_k) - L(x) < \epsilon$ لكل $x_{k-1} \leq x \leq x_k$. لأن L غير تناقصية . الآن بما أن المتتالية من الدوال $\{S_n\}$ تتقارب نقطياً وبما أنه يوجد عدد منته من النقاط x_k فباستطاعتنا اختيار n كبيرة للغاية بحيث $|S_n(x_k) - L(x_k)| < \epsilon$ لجميع

قيم K . بما أن أى x تقع في إحدى الفترات $[x_{k-1}, x_k]$ وبما أن L غير تناقصية فإن

$$S_n(x) \leq S_n(x_k) \leq L(x_k) + \epsilon \leq L(x) + 2\epsilon$$

وذلك باستخدام الحقائق التالية على الترتيب: S_n غير تناقصية والمراجعة $S_n(x_k) \leq L(x_k) + \epsilon$ والمراجعة $L(x_k) \leq L(x) + \epsilon$ والتي تتبع مما ذكرناه أعلاه. وبالمثل

$$L(x) - 2\epsilon \leq L(x_{k-1}) - \epsilon \leq S_n(x_{k-1}) \leq S_n(x)$$

هذه المراجعات في حالة كون n كبيرة بقدر كاف تقتضى :

$$|S_n(x) - L(x)| \leq 2\epsilon$$

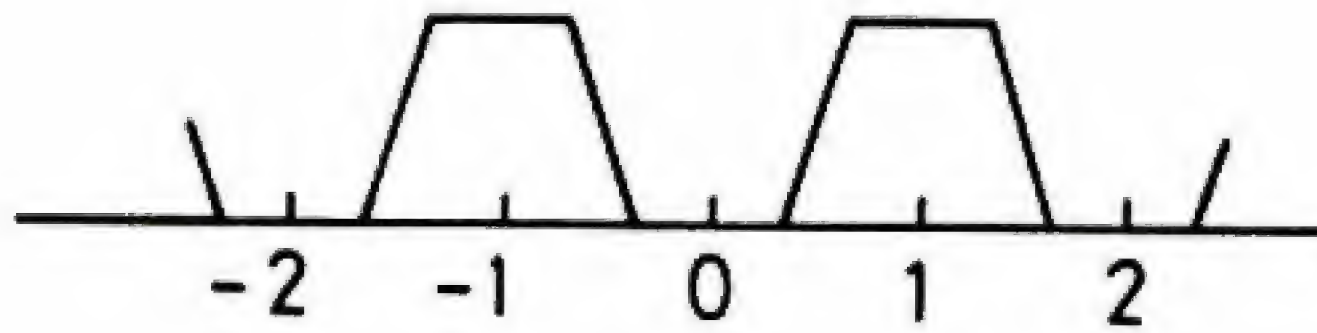
لكل x في $[a, b]$ وهذا هو تعريف التقارب المنتظم للمتتالية $\{S_n\}$.
نهاية متتالية من الدوال غير المستمرة ربما تكون مستمرة أو غير مستمرة بغض النظر عن كون التقارب منتظماً أو غير منتظم .
إن أحد أسباب أهمية فكرة التقارب المنتظم هو أنه يعطينا طريقة مناسبة لبناء دالة ذات خاصية معينة وذلك عن طريق جعلها نهاية لدوال متقاربة بانتظام ليس لها بالضرورة تلك الخاصية .

كتوضيح لهذا المبدأ (الذى يسمى في بعض الأحيان تكثيف النقاط الشاذة) (The Condensation of Singularities) سوف ننشئ منحنياً مستمراً يمر بكل نقطة في مساحة من المستوى (هذه المنحنيات التى تغطى مساحة معينة عادة تسمى منحنيات بيانو Peano) . لا بد في الحقيقة من أن نعرف في البداية ماذا يقصد بالجملة «منحنى مستمر» . لكن في المقابل سوف نستخلص من هذا البناء هو أن التعريف الطبيعي لمنحنى مستمر ربما يؤدي إلى شيء لا يتوافق مع بديهيتنا لما يجب أن يكون عليه شكل المنحنى المستمر^(٢٢) .

الطريقة المعتادة لتعريف منحنى مستمر في R_2 هو أن نقول إنه صورة مستمرة لقطعة مستقيم أي أنه مجموعة قيم لدالة مستمرة معرفة على فترة مغلقة مناسبة مثل

$[0, 1]$ في R_1 . بالطبع ربما دوال مختلفة تعطي نفس الصورة ولكن هذا لاعلاقة لنا به هنا. لكن سوف نثبت أنه يوجد على الأقل دالة واحدة بحيث أن صورة فترة تغطي كل نقطة في مربع، في الحقيقة بعض النقاط تغطي أكثر من مرة سوف نمثل النقاط P في الصورة بواسطة إحداثياتها. لنفترض أن $(x(t), y(t))$ هي صورة النقطة t في النطاق وهذا يعني أننا اصطلاحنا على أن المنحني المستمر معرف بالمعادلتين $x = x(t)$ و $y = y(t)$ حيث x و y مستمرتان.

الآن سوف ننشئ منحنيًا مستمرًا حسب هذا التعريف ليمر بكل نقطة في المربع $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$. في الحقيقة هذا المنحني سيمر ببعض النقاط في المربع أربع مرات. بالإمكان تعديل البناء للحصول على منحني يمر ببعض النقاط ثلاث مرات على أسوأ الأحوال وهذا هو أحسن مايمكن الحصول عليه كما يقتضيه علم التبولوجيا^(٢٣).



شكل (٥)

سوف نتأكد هنا من أن المنحني يمر ببعض النقاط مرتين على الأقل أي أنه لا يوجد تناظر أحادي من قطعة المستقيم إلى المربع ويكون شاملاً في نفس الوقت. سوف نعتمد في بنائنا^(٢٤) على خواص الدالة f المستمرة والزوجية والدورية التي دورتها 2 والتي تساوي الصفر في $[0, 1/3]$ وتساوي الواحد في $[2/3, 1]$ وخطية في $(1/3, 2/3)$ كما في شكل (٥). الآن لنعرف دالتين x و y كالتالي:

$$x(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2^2} f(3^2 t) + \frac{1}{2^3} f(3^4 t) + \dots$$

$$y(t) = \frac{1}{2} f(3t) + \frac{1}{2^2} f(3^3 t) + \frac{1}{2^3} f(3^5 t) + \dots$$

كلتا السلسلتين متقاربة بانتظام (راجع اختبار فيرستراس)، لذلك فإن x و y دالتان مستمرتان .

ليكن $0 \leq x_0 \leq 1$ و $0 \leq y_0 \leq 1$ ومثل x_0 و y_0 عشرياً في النظام الثنائي راجع بند (٦) :

$$x_0 = 0 . a_0 a_2 a_4 \dots$$

$$y_0 = 0 . a_1 a_3 a_5 \dots$$

الآن نعرف العدد t_0 عن طريق نشره في النظام الثلاثي ليكون $t_0 = 0.(2a_0)(2a_1)(2a_2) \dots$ أي بمضاعفة الخانات الثنائية لكل من x_0 و y_0 ومداخلتهما مع بعض ومن ثم قراءة النتيجة في النظام الثلاثي . الآن نثبت أن $x(t_0) = x_0$ وأن $y(t_0) = y_0$ لذلك فالمنحنى الذي معادلته الوسيطيتان هما $x = x(t)$ و $y = y(t)$ يمر بالنقطة (x_0, y_0) .

للحصول على هذا سنبرهن أن $f(3^k t_0) = a_k$ لكل $k = 0, 1, 2, \dots$ ولذلك يكون واضحاً من تعريف $x(t_0)$ و $y(t_0)$ أن $x(t_0) = x_0$ و $y(t_0) = y_0$. الآن a_k إما صفر أو واحد . إذا كان $a_k = 0$ فالعدد الممثل بـ $0.(2a_k)(2a_{k+1}) \dots$ (في النظام الثلاثي) يقع بين 0 و $1/3$ ولذلك $f(3^k t_0) = f(0.(2a_k)(2a_{k+1}) \dots) = 0$ ، وإذا كان $a_k = 1$ فالعدد الممثل بـ $0.(2a_k)(2a_{k+1}) \dots$ (في النظام الثلاثي) يقع بين $2/3$ و 1 ولذلك $f(3^k t_0) = 1$.

الآن نثبت أنه لا يوجد منحنى مستمر يمر بكل نقطة من مربع لمرة واحدة فقط . إذا افترضنا وجود منحنى بتلك الخاصية فإنه سيكون صورة لدالة أحادية نطاقها فترة في R_1 (مثلاً $[0, 1]$) ومدارها مربع في R_2 . النظرية الموجودة بند ١٤ تبين أن الدالة لها معكوس مستمر . بما أن الدالة ومعكوسها تتمتعان بخاصية أن معكوس صورة مجموعة مفتوحة يكون مفتوح فإنه أيضاً صحيح أن صورة أي مجموعة مفتوحة تكون مفتوحة . لنأخذ المجموعتين المفتوحتين $(0, 1/2)$ و $(1/2, 1)$ في R_1 والتي إغلاقهما له نقطة مشتركة واحدة . صورتيهما في R_2 المجموعتان المفتوحتان E_1 و E_2 واللذان تغطيان مربعاً ما عدا نقطة واحدة P . إذا أخذنا جواراً في E_1 وآخر في E_2 فإنه

بالإمكان رسم قطعة خط مستقيم في المربع يصل بين نقطة ما في الجوار الأول وأخرى في الجوار الثاني ولا يمر بالنقطة P . لذا نحصل على مجموعتين منفصلتين غير خاليتين كلاهما مفتوحة ويغطيان قطعة المستقيم وهذا يناقض صفة الترابط $Connectedness$ في R_1 وبالتالي يستحيل وجود ذلك المنحنى.

من جهة أخرى فقد بينا في بند ٣ أنه يوجد تناظر أحادي بين فترة ومربع ومما سبق أعلاه يتضح أنه (المنحنى) لا يمكن أن يكون مستمراً. هناك نظرية أخرى مفيدة تتعلق بمفهوم التقارب المنتظم يمكن كتابتها كالتالي:

بالإمكان مكاملة المتتالية المتقاربة بانتظام حداً حداً: بدقة أكثر، إذا كانت f_n دوال على فترة محدودة من I إلى R_1 وإذا كان $f_n \rightarrow f$ بانتظام في I وإذا كانت كل f_n قابله للتكامل حسب مفهوم ريمان Riemann في I فإن:

$$\int_I f_n(x) dx \rightarrow \int_I f(x) dx$$

اثبات ذلك سهل ومباشر إذا عرفنا أن f قابلة للتكامل. إذا كانت $I = [a, b]$ نحصل على

$$\begin{aligned} \left| \int_I f_n(x) dx - \int_I f(x) dx \right| &= \left| \int_I (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_I |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq (b - a) \sup_x |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

نفس الاثبات يبين أن المتتالية من التكاملات $\int_a^b f_n(x) dx$ تتقارب بانتظام. إذا كانت كل f_n مستمرة فإن f مستمرة (راجع بند ١٦) وبالتالي قابلة للتكامل.

بشكل عام اثبات أن نهاية متتالية من الدوال القابلة للتكامل تكون قابلة للتكامل يتطلب بعض المعلومات من نظرية التكامل Theory of integration التي لا نتطرق لها في هذا الكتاب. في الحقيقة إنه من غير المجدي أن نثبتها بالنسبة لتكامل

ريمان لأنه لو استخدمنا تكامل ليبيج Lebesgue لحصلنا على نظرية أقوى بكثير: إذا كانت كل f_n قابلة للتكامل حسب مفهوم ليبيج وإذا كان $f_n \rightarrow f$ في فترة محدودة I فإن f قابلة للتكامل وكذلك فإن

$$\int_I f_n(x) dx \rightarrow \int_I f(x) dx$$

في الحقيقة يكفي أن نفترض أن $|f_n(x)| \leq g(x)$ حيث g قابلة للتكامل. لنحصل على النظرية السابقة. (في هذه الحالة نقول إن $\{f_n\}$ تتقارب بسيطرة Converges dominantly وهذا هو أحد الأسباب لتفضيل تكامل ليبيج على تكامل ريمان).

على كل حال فإن أبسط الحالات حيث يكون لدينا متتالية متقاربة بانتظام من الدوال المستمرة لها تطبيقات عديدة وجيدة، هذه واحدة منها: لنفرض أن f دالة قابلة للتفاضل من جميع الرتب وبذلك تكون جميعها مستمرة (راجع بند ٢٠).

ولنفرض أن $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)} = L$ موجودة بانتظام من جهة نحصل على

$$\int_a^x f^{(n)}(t) dt = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) \rightarrow L(x) - L(a)$$

ومن جهة أخرى فإن:

$$\int_a^x f^{(n)}(t) dt \rightarrow \int_a^x L(t) dt$$

وذلك بتطبيق النظرية المتعلقة بتكامل متتالية متقاربة بانتظام، لذلك $\int_a^x L(t) dt = L(x) - L(a)$ وبالتالي فإن $L(x) = L'(x)$ أي أن $L(x) = ce^x$. لذا فإن أي تفاضل من رتبة لانهائية لا بد وأن يكون دالة أسية بسيطة^(٢٥) (يدخل في ذلك الحالة عندما تكون مطابقة للصفر) بغض النظر عن الدالة الأصلية.

نستخدم في معظم الأحيان نفس النظرية عن التقارب المنتظم لإثبات نظرية عن التفاضل حداً حداً لمتتالية من الدوال. إذا كانت للدوال f_n مشتقات مستمرة في فترة I وإذا كانت $\{f_n(a)\}$ متقاربة لنقطة a في I وإذا كانت $\{f'_n\}$ تتقارب بانتظام فإن

f_n تتقارب بانتظام لنهاية f قابلة للتفاضل وأن $\lim f'_n = f'$.
تحت الشروط التي ذكرناها أعلاه لنفترض أن $f'_n \rightarrow g$ لنحصل على

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt$$

بما أن $f_n(a) \rightarrow f(a)$ فإن $f_n(x)$ متقاربة لكل x . في الواقع

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_n(a) - f_m(x) + f_m(a) + f_n(a) - f_m(a)| \\ &\leq |f_n(x) - f_n(a) - f_m(x) + f_m(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| \\ &\rightarrow \left| \int_a^x g(t) dt - \int_a^x g(t) dt \right| = 0 \end{aligned}$$

لذا فإن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام . الآن

$$f_n(x) - f_n(a) \rightarrow f(x) - f(a)$$

إذن $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt$. لذلك فإن f قابلة للتفاضل وأن $f'(x) = g(x)$. سوف نقبل بديهياً الحقيقة القائلة إن اشتقاق التكامل اللامحدود لدالة مستمرة يعطينا الدالة المكاملة (الأصلية) .

فيما بعد (بند ٢١) ستثبت نظرية أعم من ذلك حيث لانشترط استمرارية f'_n النقطة في عمل كهذا هو أنه دالة f ربما تكون قابلة للتفاضل عند كل نقطة ولكن اشتقاقها غير قابل للتكامل حيب مفهوم ريمان أو ليبيج للتكامل . مثلاً لو أخذنا الدالة $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ لكل $x \neq 0$ و $f(0) = 0$ فإن f' غير محدودة وبالتالي غير قابلة للتكامل الريماني أو الليبيجي .

تمرين (١٧-١)

إذا كانت دالة f من R_1 إلى R_1 قابله للتفاضل من جميع الرتب وكانت السلسلة .
مجموعها^(٢٦) . التطبيقات المختلفة التي ذكرناها للتقارب المنتظم كانت صيغاً معينة

تحت شروط مختلفة لإمكانية أخذ النهايات حداً حداً لمتتالية متقاربة بانتظام وهذا تطبيق آخر.

تمرين (١٧-أ)

اثبت نظرية تانري Tannery : إذا كانت $f_n(k) \rightarrow L_n$ عندما $k \rightarrow \infty$ لكل n وإذا $|f_n(k)| \leq M_n$ لكل k بحيث تكون $\sum M_n$ متقاربة فإنه إذا كانت $p = p(k) \rightarrow \infty$ عندما $k \rightarrow \infty$ فإننا نحصل على

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{f_1(k) + f_2(k) + \dots + f_p(k)\} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n$$

تمرين (١٧-ب)

(تطبيق) اثبت أن

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + x/k)^k = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n!$$

هناك حالات سهلة حيث النظرية المذكورة في (بند ١٦) بخصوص التكامل حداً حداً لمتتالية متقاربة بانتظام غير ملائمة، فعلى سبيل المثال.

$$1 - x + x^2 - \dots + (-x)^n = [1 - (-x)^{n+1}] / (1 + x)$$

وبالتالي

$$|x| < 1 \text{ إذا كانت } 1 - x + x^2 - \dots = \frac{1}{1 - x}$$

الآن

$$\begin{aligned} \log 2 &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 dx - \int_0^1 x dx + \int_0^1 x^2 dx - \dots \\ &= 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots \end{aligned}$$

لا يمكن تبرير هذه الخطوة بالرجوع إلى النظرية عن التقارب المنتظم لأن المتتالية $\{f_n\}$ حيث $f_n(x) = [1 - (-x)^n] / (1 + x)$ غير متقاربة بانتظام في $[0, 1]$ (لأنها

غير متقاربة أصلاً عند 1 ، ولا حتى في $[0, 1]$. في الواقع لو كانت كذلك فإن القيمة العظمى على $[0, 1)$ للكمية $|x|^n/(1+x)$ تؤول للصفر عندما $n \rightarrow \infty$ ، ولكن $|x|^n/(1+x) \geq \frac{1}{2} |x|^n$ فالقيمة العظمى تكون على الأقل $\frac{1}{2}$ ولذلك لا يمكن أن تؤول للصفر. تجدر الإشارة إلى أنه بالنسبة للمثال السابق يمكن بسهولة التأكد من النتيجة بدون الرجوع إلى نظرية التقارب المحدود (والتي يمكن تطبيقها لأن $|[1 - (-x)^n]/(1+x)| \leq 2$. والآن

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx.$$

$$\left| 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \log 2 \right| \leq \left| \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

هذه الحسابات اعلاه تبين أمرين في وقت واحد ، أولاً أن السلسلة $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ متقاربة وثانياً أن مجموعها يساوي $\log 2$.

ربما يخمن القارئ عند هذه النقطة أنه إذا حصلنا على نتيجة محددة بمكاملة متتالية متقاربة حداً حداً فهي بالضرورة النتيجة الصحيحة. هذا ليس صحيحاً، فعلى الرغم من صحته لمتسلسلات القوة، فإنه من الصعب إعطاء مثال مخالف Counter example لا يبدو وكأنه مصطنع. على كل حال إذا كانت f_n دالة معرفة بالصيغة $f_n(x) = n$ لكل $0 < x < 1/n$ و $f_n(x) = 0$ فيما عدا ذلك، فإن $f_n(x) \rightarrow 0$ لكل x بينما $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$ لذلك $\lim \int_0^1 f_n(x) dx$ و $\int_0^1 \lim f_n(x) dx$ موجودان ومختلفان.

تمرين (١٧-٢)

ابحث عن مثال لدوال مستمرة f_n له نفس الظاهرة السابقة.

بطريقة مشابهة ليس من الصعب (على الرغم من أننا لن نقوم به) اثبات أن

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum \frac{\sin nx}{n} \quad \text{لكل } 0 < x < \pi .$$

مكاملة الطرفين ينتج عنها

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\pi^2 &= \int_0^\pi \frac{\pi - x}{2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

وبذلك نحصل على طريقة سهلة لجمع السلسلة العددية

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

بما أنه بالإمكان إثبات أن السلسلة الأصلية أعلاه غير متقاربة بانتظام فتبرير الخطوات السابقة يخرج عن نطاق هذا الكتاب. لكن من جهة أخرى من الممكن إثبات أن السلسلة $\sum n^{-1} \sin nx$ متقاربة محدودة لذا فالنظرية الخاصة بمكاملة هذا النوع من المتتاليات كافية لهذا الغرض.

١٨ - النهايات النقطية لدوال مستمرة (٢٧)

(Pointwise Limits of Continuous Functions)

لنعتبر دوال من فترة في R_1 إلى R_1 . على الرغم من أن النهاية النقطية لدوال مستمرة قد لا تكون مستمرة لكنه، كما سنثبت الآن، لا يمكن أن تكون غير مستمرة بقدر كبير: أي أن النقاط التي تكون فيها النهاية مستمرة لا بد وأن تكون على الأقل مجموعة كثيفة في كل مكان. (لذلك فالدالة غير المستمرة في أي مكان والمذكورة في (بند ١٢) والتي حصلنا عليها من دوال مستمرة بأخذ النهاية مرتين متتابعتين لا يمكن الحصول عليها عن طريق أخذ النهاية مرة واحدة فقط لدوال مستمرة).

نبدأ بملاحظة أنه إذا كانت دالة غير مستمرة عند نقطة x فإن صورة جوار اختياري صغير للنقطة x ليس لها قطر اختياري صغير. أي أنه يوجد عدد طبيعي n بحيث أن قطر أي جوار L x يكون على الأقل $1/n$. (من البديهي أن لصورة جوار كبير قطر كبير لذلك يمكننا أن نقول «كل جوار» بدلاً من «جوار صغير»). الآن لنفترض أن f غير مستمرة عند كل نقطة من فترة وأن E_n المجموعة من النقاط في هذه الفترة بحيث أن قطر صورة كل جوار L x يساوي على الأقل $1/n$. كما بينا أعلاه

فإن كل x تنتمي إلى إحدى المجموعات E_n ، كذلك فإن كل E_n مغلقة، لأنه إذا كانت y نقطة نهاية لـ E_n فإن كل جوار للنقطة y يحتوي على x في E_n ولذا يحتوي على جوار لـ x وبالتالي فإن قطر صورة كل جوار للنقطة y يساوي على الأقل $1/n$. نستخدم الآن نظرية بير Baire والتي تقول بأن إحدى E_n تكون كثيفة في فترة جزئية J . بما أن E_n مغلقة فهي تحتوي J . لذا فالفترة J تتميز بخاصية أن صورة كل فترة جزئية من J قطرها يساوي $1/n$ على الأقل. وجود مثل هذه الفترة J يكون إذن نتيجة لكون f غير مستمرة عند كل نقطة من فترة ما. الآن نثبت أن النهاية النقطية لدوال مستمرة لا يمكن أن تملك مثل تلك الفترة وبالتالي لا يمكن أن تكون غير مستمرة عند كل نقطة من أي فترة.

بما أن نطاق f مجموعة جزئية من R_1 فإنه بالإمكان تغطيتها بعدد قابل للعد من الفترات $I_n = (a_n, b_n)$ طول كل منها أقل من $1/n$. لنفحص الصورة العكسية H_n للفترة I_n : اتحاد المجموعات H_n يغطي الفترة J لكن أي منها لا يمكن أن يحتوي على فترة جزئية من J لأن كل صور الفترات الجزئية من J لها أقطار أكبر من $1/n$. من جهة أخرى نظرية بير تبين أن إحدى المجموعات H_n كثيفة في فترة جزئية من J . لو عرفنا أن H_n مغلقة لحصلنا على تعارض لأن المجموعة المغلقة والكثيفة في فترة تحوي تلك الفترة.

لا يوجد سبب يدعونا للاعتقاد بأن H_n مغلقة حتى ولو كانت f نهاية نقطية لدوال مستمرة. على كل بإمكاننا أن نبين أن كل H_n هي اتحاد عدد قابل للعد من المجموعات المغلقة وهذا يفي بالغرض تماماً، لأنه إذا كانت للمجموعة H_n هذه الخاصية فبتطبيق نظرية بير مرة أخرى فإن إحدى المجموعات المغلقة كثيفة في فترة جزئية من J وبالتالي تحوي تلك الفترة الجزئية. بما أن المجموعات هي مجموعات جزئية من H_n فإن H_n تحوي أيضاً فترة جزئية من J .

لذلك فقد اختزلنا إثبات النظرية إلى النقطة التي نبين فيها أنه، إذا كانت f نهاية نقطية لدوال مستمرة f_k فإن المجموعات H_n هي اتحاد عدد قابل للعد من المجموعات المغلقة. لنتذكر أن H_n هي معكوس صورة الفترة (a_n, b_n) أي أن H_n هي مجموعة من النقاط بحيث $a_n < f(x) < b_n$. لنأخذ x في H_n . إذا كانت J كبيرة بقدر كاف

فإن $a_n + 1/(2j) \leq f(x) \leq b_n - 1/(2j)$ لأن $a_n < f(x) < b_n$. بما أن $f_k(x) \rightarrow f(x)$ لذا فإن $a_n + 1/j \leq f_k(x) \leq b_n - 1/j$ لكل عدد k كبير بقدر كاف. لتكن المجموعة التي عناصرها تحقق المتراجحة الأخيرة و $F_{m,j}$ تقاطع كل من $E_{m,j}, E_{m+1,j}, E_{m+2,j}, \dots$ المجموعات $E_{k,j}$ مغلقة لأنها صورة عكسية لفترات مغلقة والدالة f_k مستمرة، وكذلك المجموعات $F_{m,j}$ مغلقة لكونها تقاطع مجموعات مغلقة. لقد رأينا آنفاً أنه إذا كانت x في H_n فإن x في إحدى المجموعات $F_{m,j}$. أي أن H_n مجموعة جزئية من اتحاد جميع $F_{m,j}$. من جهة أخرى إذا كانت x في إحدى $F_{m,j}$ فإن $a_n + 1/j \leq f_k(x) \leq b_n - 1/j$ لعدد ما j ولكل عدد k كبير بقدر كاف. بما أن $f_k(x) \rightarrow f(x)$ فإن هذا يؤدي إلى أن $a_n + 1/j \leq f(x) \leq b_n - 1/j$ ولذا $x \in H_n$. بالتالي فإن H_n مطابقة لإتمام جميع $F_{m,j}$ لكل الأعداد الطبيعية j, m . لذا نجحنا في تمثيل H_n كاتحاد عدد قابل للعد من المجموعات المغلقة وهذا هو المطلوب لإكمال الإثبات.

إن تغييراً طفيفاً في الإثبات السابق يبين أن نقاط استمرار نهاية متتالية من الدوال المستمرة تكون مجموعة كثيفة في كل مكان في كل مجموعة تامة وغير خالية. بهذه الصيغة نحصل على أن العكس صحيح: أي أن الدالة التي نقاط استمرارها كثيفة في كل مجموعة تامة وغير خالية بالإمكان تمثيلها كنهاية لدوال مستمرة.

بير وصف النهايات غير المستمرة لدوال مستمرة على أنها من فئة 1 والنهايات لدوال من فئة 1 والتي نفسها (النهايات) ليست من فئة 1 على أنها من فئة 2 وهكذا في الحقيقة يوجد دوال لا تنتمي إلى أي فئة (من فئات بير Baire). مثال شيق لدالة من فئة 1 لبير هو أي دالة غير مستمرة في R_2 بحيث تكون مستمرة في كل خط يوازي أحد الإحداثيات^(١٢٧).

تمرين (١٨-١)

أعط مثلاً لتلك الدالة.

من العجيب أنه على الرغم من أننا بينا فقط أن للنهاية النقطية لدوال مستمرة مجموعة كثيفة في كل مكان من نقاط الاستمرار، فإن أكثر من ذلك صحيح أيضاً:

مجموعة النقاط التي لا تحقق عندها الاستمرار لابد وأن تكون مجموعة من الفئة الأولى .
 هذه الخاصية لاعلاقة لها بكون الدالة المعنية هي نهاية نقطية لدوال مستمرة . في
 الحقيقة سوف نبين أن الدالة الحقيقة f التي نطاقها فترة في R_1 إذا كانت مستمرة عند
 نقاط تكون مجموعة كثيفة في كل مكان فإنها مستمرة ماعدا في مجموعة من الفئة
 الأولى .

لنعتبر المجموعات E_n من النقاط x حيث توجد متتالية $\{y_k\}$ نهايتها x وتحقق
 $|f(y_k) - f(x)| > \frac{1}{n}$. كل نقطة عدم استمرار تكون في إحدى E_n أي أن مجموعة نقاط
 عدم الاستمرار محتواة في اتحاد E_n . بما أنه يوجد عدد قابل للعد من E_n فالنظرية
 متحققة إذا أثبتنا أن كل E_n مغلخلة . في حالة أن إحدى المجموعات E_n غير
 مغلخلة فإنه توجد نقطة x ، حيث f مستمرة عندها ، وتكون نقطة نهاية لهذه
 المجموعة E_n إذا اخترنا δ موجبة بحيث $|y - x| < \delta$ فهذا يؤدي إلى أن
 $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{2n}$ وإذا اخترنا نقطة w في E_n بحيث $|w - x| < \frac{1}{2}\delta$ وكانت y_k هي
 النقاط التي تنتمي إلى E_n فإن $|f(y_k) - f(w)| \leq |f(y_k) - f(x)| + |f(x) - f(w)| < \frac{1}{n}$ إذا
 كان k عدداً كبيراً بقدر كاف فيه ، وهذا يتعارض مع تعريف E_n .

١٩ - تقريب الدوال المستمرة

(Approximations Continuous Function)

لقد رأينا في بند ١٠ أنه رغم استمرار دالة من R_1 إلى R_1 فإن منحناها قد يكون غير
 منتظم على الأقل للدرجة التي يكون فيها متذبذب في كل فترة . من جهة أخرى يوجد
 دائماً دالة منحناها ممهداً تماماً حيث إنه قريب جداً لمنحنى الدالة المستمرة المعطاة .
 بدقة أكثر إذا كان نطاق دالة مستمرة فترة متراصة فبالإمكان إيجاد دالة قريبة من الدالة
 المعطاة وتكون دالة درجية أو دالة مستمرة مضلعة أو كثيرة حدود . منحني الدالة
 الدرجية مكون من عدد منته من القطع المستقيمة الأفقية بينما منحني الدالة المضلعة
 مكون من عدد منته من القطع المستقيمة في أي اتجاه (غير العمودي) . الجملة «بالقدر
 الذي نرغبه» تفسر حسب المسافة للفضاء B . بمعنى آخر إذا كانت f دالة مستمرة و
 ϵ أي عدد موجب فإنه توجد دالة درجية f_1 ودالة مستمرة مضلعة f_2 وكثيرة حدود f_3

بحيث $|f(x) - f_k(x)| < \epsilon$ ، $(k = 1, 2, 3)$ لكل x في الفترة المعطاة .

الخاصية التي تجعل مثل هذا التقريب ممكناً تسمى الاستمرار المنتظم . نقول إن دالة f مستمرة عند x إذا كان لكل ϵ موجب توجد δ موجبة بحيث $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ عندما $|x - y| < \delta$ هنا بشكل عام لا بد من إيجاد δ أصغر من سابقتها كلما أخذنا نقاطاً مختلفة x . إذا كان دائماً بالإمكان إيجاد δ (بالنسبة لدالة f معطاة) بحيث تصلح لجميع قيم x في مجموعة معطاة فيقال للدالة f إنها مستمرة بانتظام في تلك المجموعة الآن نبرهن أن الدالة المستمرة تكون مستمرة بانتظام في أي فترة متراصة من نطاقها . في الواقع سنثبت هذه النظرية في حالة أعم من ذلك بكثير : الدالة المستمرة التي نطاقها ومداهها في فضاء ميري تكون مستمرة بانتظام في أي فترة جزئية S متراصة من نطاقها .

لإثبات هذه النظرية نأخذ ϵ موجب و N ترمز لجوار النقطة x بحيث $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ لكل y في N وليكن M الجوار الذي مركزه x ونصف قطره يساوي نصف قطر N . مجموعة الجوارات M تغطي S وبما أن S متراصة فإن عدداً منتهياً منها يغطي S أيضاً . لتكن هذه الجوارات M_1, M_2, \dots, M_n و δ أصغر نصف قطر لكل من M_k . لنفترض أن x و y أي نقطتين من S بحيث $d(x, y) < \delta$. بما أن x في إحدى M_k ، وإذن $d(y, z) \leq d(x, z) + \delta$ حيث z مركز M_k . بما أن δ أصغر نصف قطر للجوارات M_k فالمراجعة السابقة تبين أن y في N_k والذي مركزه z . لذلك فالطريقة التي عرفنا بها N_k تقتضي $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$ و $d(f(y), f(z)) \leq \epsilon$ وبالتالي المراجعة الثلاثية تؤدي إلى $d(f(x), f(y)) \leq 2\epsilon$.

سنبدأ الآن في بناء الدوال التقريبية الثلاث التي أشرنا أعلاه إلى وجودها .

لتكن S فترة متراصة في R_1 . لبناء دالة درجية f_1 بحيث $|f_1(x) - f(x)| < \epsilon$ لكل x . بإمكاننا حذف الأجزاء المتداخلة من الجوارات M_k في الإثبات السابق (والتي عبارة عن فترات في هذه الحالة) وتعريف $f_1(x) = f(y_k)$ في الجزء الباقي من M_k ، حيث y_k هي مركز N_k .

لبناء الدالة المضلعة f_2 احذف أيضاً الأجزاء المتداخلة من M_k وسم الفترات المتبقية (a_k, a_{k+1}) لذا فإن منحنى f_2 هو المضلع الذي رؤوسه $(a_k, f(a_k))$.

إن بناء كثيرة الحدود f_3 أصعب نوعاً ما^(٢٨). إحدى الطرق لعمل ذلك كالتالي: لتبسيط الصيغ فقط لنفترض أن نطاق الدالة المستمرة المعطاة هو الفترة $[h, 1 - h]$ حيث $0 < h < 1$. بإمكاننا تمديد Extend الدالة المعطاة بطريقة واضحة بحيث تكون الدالة المحددة مستمرة في R_1 وصفرًا خارج $(1/2h, 1 - 1/2h)$. لنعتبر الدالة المعرفة بالصيغة

$$I(x) = c_n \int_0^1 f(t)[1 - (x - t)^2]^n dt \quad \text{حيث} \quad 1/c_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt$$

من الواضح أن درجة كثيرة الحدود I تساوي $2n$. الحد الذي بين الأقواس المربعة أعلاه يحصل على قيمة العظمى عند $t = x$ ويكون صغيراً عندما تكون t قريبة من x (و n كبيرة)، لذا يبدو بالفعل أن $I(x)$ قريبة من $f(x)$ وهذا ماستثبته الآن.

نستطيع أن نكتب $I(x)$ كالتالي

$$I(x) = c_n \int_{x-1}^x f(x-s)(1-s^2)^n ds$$

وبما أن $f(t) = 0$ عندما $t < 0$ أو $t > 1$ فإن:

$$I(x) = c_n \int_{-1}^1 f(x-s)(1-s^2)^n ds$$

كذلك من تعريف c_n نحصل على

$$I(x) - f(x) = c_n \int_{-1}^1 [f(x-s) - f(x)](1-s^2)^n ds$$

الآن نجزيء التكامل أعلاه إلى ثلاثة أجزاء

$$I_1 = c_n \int_{-1}^{-\delta}, I_2 = c_n \int_{-\delta}^{\delta}, I_3 = c_n \int_{\delta}^1$$

حيث $0 < \delta < 1$ وسنختارها بعد قليل.

عند هذه النقطة نستخدم استمرارية f بانتظام: إذا كان ϵ أي عدد موجب

نستطيع أن نجد δ صغيرة بقدر كاف بحيث $|f(x-s) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ إذا كان $|s| < \delta$ ، ولاحظ أن المتراجحة متحققة لجميع قيم x بنفس قيمه. الآن نستخدم هذه المتراجحة لتقدير I_2 :

$$|I_2| \leq \frac{1}{3} \epsilon c_n \int_{-\delta}^{\delta} (1-s^2)^n ds < \frac{1}{3} \epsilon c_n \int_{-1}^1 (1-s^2)^n ds = \frac{\epsilon}{3}$$

الآن f محدودة لأنها مستمرة على مجموعة متراسة: $|f(x)| \leq M$ بالنسبة لـ I_3 فإن $(1-s^2)^n \leq (1-\delta^2)^n$ بينما

$$1/c_n = \int_{-1}^1 (1-t^2) dt \geq \int_0^{\delta/2} (1-t^2)^n dt \geq \frac{1}{2}\delta(1-\frac{1}{4}\delta^2)^n$$

لذا فإن

$$|I_3| \leq 2 c_n M \int_{\delta}^1 (1-s^2)^n ds \leq 4M\delta^{-1}(1-\delta^2)^n(1-\frac{1}{4}\delta^2)^{-n}$$

بما أن $(1-\delta^2)/(1-\frac{1}{4}\delta^2) < 1$ فإن $I_3 \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$. نفس النقاش ينطبق تماماً على I_1 . باخذ n كبيره بقدر كاف نجد أن $|I_1|$ و $|I_3|$ أقل من $\epsilon/3$. لذلك $|I(x) - f(x)| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \leq \epsilon$ في حالة كون n كبيرة بقدر كاف أي أن كثرة الحدود I تعتبر تقريباً للدالة f إذا كانت n كبيرة بقدر كاف.

إن مفهوم تقريب دالة مستمرة بكثيرة حدود له تطبيقات عدة. لقد استعمل هذا المفهوم في (بند ١٠) لإثبات وجود دالة مستمرة غير قابلة للتفاضل في أي مكان، وفيما يلي تطبيق آخر.

لتكن f دالة معرفة في الفترة $[a, b]$. الكميات $\int_a^b f(x)x^n dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) تسمى عزوم (Moments of f). سوف نبين أن الدالة المستمرة التي نطاقها مجموعة متراسة في R_1 تتحدد بعزومها، أي أنه إذا كان لدالتين مستمرتين نفس المتتالية من العزوم فإنهما متطابقتان. (لانتطرق هنا إلى كيفية حساب الدالة المستمرة من عزومها). الجملة السابقة مكافئة لأن نقول إن الدالة المستمرة التي جميع عزومها مساوية للصفر لابد وأن تساوي الصفر وهذا مانثبته الآن. لنفترض أن جميع عزوم f تساوي

الصفء. لا يفقد شىء من التعميم إذا افترضنا أن $a = 0, b = 1$. إذا لم تكن f مطابقة للصفء فإنها موجبة (أو سالبة) في فترة ما وبالإمكان بناء دالة مستمرة g مطابقة للصفء خارج هذه الفترة بحيث $0 < \int_0^1 fgdx = 2h$. (انظر الشكل ٦).



شكل (٦)

ننشئ في البداية كثيرة حدود p بحيث $|g(x) - p(x)| < h/\max|f(x)|$. إذن

$$\begin{aligned} \int_0^1 fpdx &= \int_0^1 fgdx - \int_0^1 f(g-p)dx \\ &\geq 2h - \max|f(x)| \cdot \max|g(x) - p(x)| > h \end{aligned}$$

لتكن $\int_0^1 fp dx = 0$ لأن جميع عزوم f تساوى الصفء. من هذا التعارض نستنتج أن $f = 0$.

كنتيجة للنظرية السابقة عن العزوم نرى أن مجموعة جميع الدوال المستمرة بالإمكان وضعها في تناظر أحادي مع فئة من المتتاليات العددية وذلك لأن للدوال المستمرة المختلفة متتاليات مختلفة من العزوم. بما أن عدد المتتاليات العددية مساو لعدد الأعداد الحقيقية (تمرين ٣-١٠) فإنه توجد دوال مستمرة بنفس عدد الأعداد الحقيقية. (الطريق المباشر للتأكد من ذلك هو ملاحظ أنه يمكن تعيين الدوال المستمرة بقيمها عند الأعداد النسبية أي عن طريق متتالية من الأعداد الحقيقية).

خاصية الاستمرار المنتظم مفيدة أيضا في تبرير تبديل عمليات النهايات في حساب التفاضل والتكامل. على سبيل المثال لتكن f مستمرة نطاقها في R_2 وافترض أن $f(x, b) = L$ لجميع قيم x في فترة ما، أي أن الدالة ثابتة على الخط الأفقي $y = b$ ، فإنه ليس بالضرورة أنه عندما $y \rightarrow b$ فالتفاضل الجزئي $\partial f/\partial x$ عند (x, y) يؤول إلى الصفء لكل x . (والمثال على ذلك):

$$f(x, y) = y \sin (1/(xy)), f(x, 0) = 0, b = 0, L = 0$$

قيمة $\partial f/\partial x$ عند (x, y) تساوى $-x^{-2} \cos (1/(xy))$ وهذا لا يؤول إلى نهاية معينة أى أنه لا يمكن أن نكتب

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow b} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, b) - f(x, b)}{h} \end{aligned}$$

على كل حال المساواة السابقة صحيحة في أى جوار للنقطة (a, b) حيث $\partial f/\partial x$ دالة مستمرة (أى مستمرة كدالة نطاقها جوار في R_2 وليست مستمرة فقط بالنسبة للمتغير x لكل y ومستمرة في y لكل x ، الحالة الأخيرة تعني الاستمرارية في R_1 لحصر f على خطوط موازية للإحداثيات). الإثبات يعتمد على استمرارية $\partial f/\partial x$ بانتظام. أولاً لاحظ أن $\partial f/\partial x$ يساوى صفراً عند أى نقطة (x, b) لأن $f(x, b) = L$. ثانياً، نظرية القيمة المتوسطة تؤدي إلى

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x+h', y)$$

حيث $0 < h' < h$. أخيراً، $\partial f/\partial x$ عند $(x+h', y)$ يختلف عن $\partial f/\partial x$ عند (x, b) ، حيث يساوى الصفر، بمقدار ضئيل إذا كانت h (ولذا h') و $|y-b|$ قريبين من الصفر بقدر كاف.

٢٠ - الدوال الخطية (Linear Functions)

الدالة f التي نطاقها R_1 تسمى خطية إذا كان $f(x) + f(y) = f(x+y)$ لجميع قيم x و y . (هذا استعمال خاص للصفة الخطية عما هو مألوف: الدالة f المعرفة بالصيغة $f(x) = ax + b$ ليست خطية حسب تعريفنا عندما $b \neq 0$ ومن الواضح أنه إذا كان $f(x) = \pm ax$ فإنها خطية ويتوقع أن لجميع الدوال الخطية هذه الصيغة، لكن هذا ليس

صعباً لإعطاء مثال على ذلك لا بد من الرجوع إلى إحدى الخواص المعقدة لنظام الأعداد الحقيقية التي تعتمد على مفاهيم لا نتطرق لها في هذا الكتاب^(٢٩). أمر آخر ليس واضحاً أيضاً ولكن سنثبت بعد قليل هو أن الدالة الخطية غير المستمرة لا بد وأن تكون غير مستمرة بشكل كبير: مثلاً تكون غير محدودة في كل فترة وفي الواقع منحناها يجب أن يكون في R_2 . لذا من المتوقع أنه لا يوجد بناء سهل لدالة من هذا النوع.

لنعتبر دالة خطية f . لكل x نحصل على $f(2x) = f(x + x) = 2f(x)$ ولذا بالاستقراء الرياضي فإن $f(nx) = nx$ لكل عدد طبيعي n . بما أن $f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0)$ فإن $f(0) = 0$. كذلك $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ لذا $f(-x) = -f(x)$ أي أن $f(nx) = nx$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة. إذا استبدلنا x بـ x/n نحصل على $f(x) = nf(x/n)$ أي أن $f(x/n) = n^{-1}f(x)$. الآن استبدل x بـ mx ولذا $f(mx/n) = n^{-1}f(mx) = \frac{m}{n}f(x)$ لذا $f(rx) = rf(x)$ لكل عدد قياسي r . عندما $x = 1$ فإن $f(r) = rf(1)$ لكل عدد قياسي r . هذا يؤدي إلى أنه إذا كانت f مستمرة فإن $f(x) = xf(1)$ لكل x .

نستطيع تقوية هذه النتيجة بسهولة عن طريق إثبات $f(x) = xf(1)$ لكل x إذا كانت f مستمرة فقط عند نقطة ما. إذا كان $a < c < b$ فإن $f(c + \delta) - f(c) \rightarrow 0$ عندما $\delta \rightarrow 0$ ، لكن $f(c + \delta) - f(c) = f(\delta)$ لذا $f(\delta) \rightarrow 0$ عندما $\delta \rightarrow 0$. أي أن f مستمرة عند 0 . الآن إذا كانت x أي عدد حقيقي فإن $f(x + \delta) - f(x) = f(\delta) \rightarrow 0$ عندما $\delta \rightarrow 0$ لذا f مستمرة عند x . وبالتالي f مستمرة في R_1 وهذا يقتضي أن $f(x) = xf(x)$.

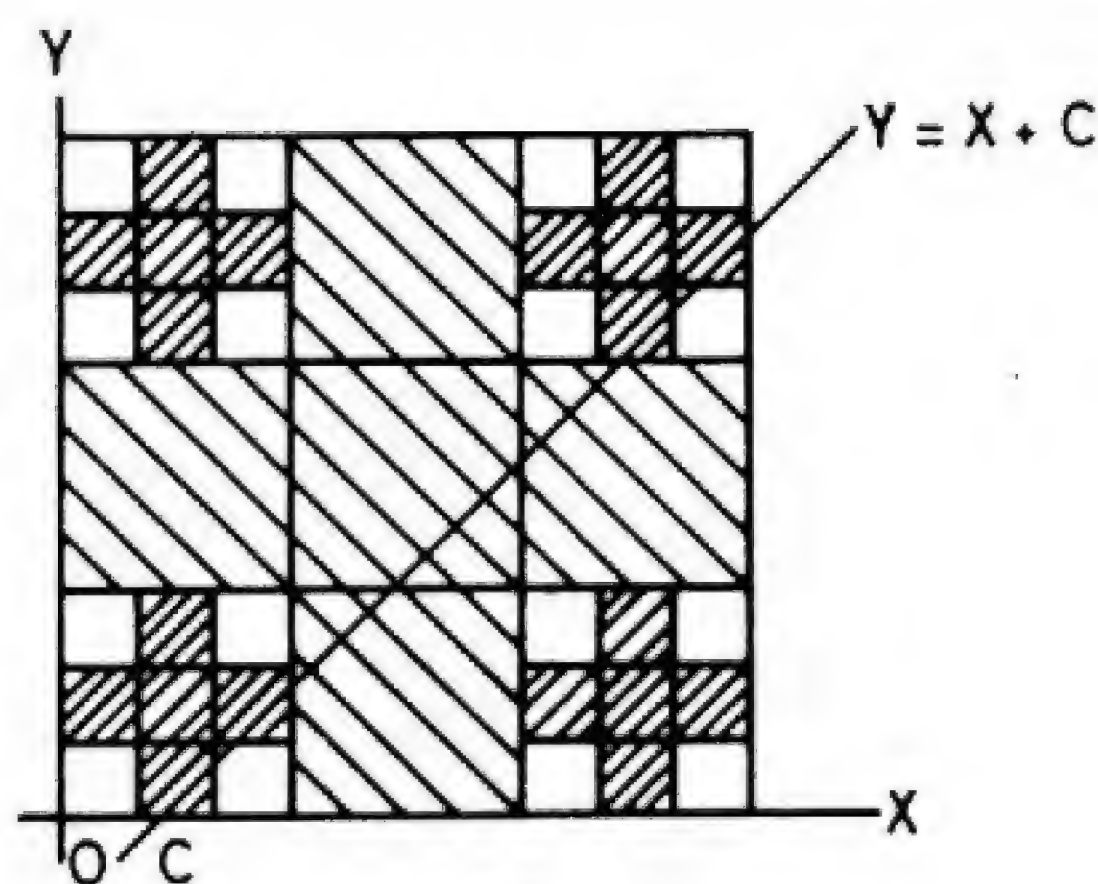
نستطيع أيضاً تخفيف بعض الفرضيات وإثبات أن الدالة الخطية مستمرة. لنفترض أن f محدودة فقط في فترة ما أو حتى في مجموعة E لها الخاصية التالية: المجموعة المكونة من جميع المسافات $|x - y|$ بين النقاط x و y في E تحتوي على جوار للنقطة 0 . أي أنه يوجد عدد δ موجب بحيث إذا كانت $|t| < \delta$ فإنه توجد نقاط x و y في E بحيث $x - y = t$. إذن باستطاعتنا أيضاً الاستنتاج^(٣٠) أن f مستمرة إذا

كانت خطية، ولذا الدالة الخطية f المحدودة في مجموعة من ذلك النوع المذكور أعلاه لابد وأن تكون على صيغة $f(x) = cx$.

لتكن $|f(x)| \leq M$ في E . للأعداد t التي هي مسافات بين نقاط في E نحصل على $|f(t)| = |f(x - y)| = |f(x) - f(y)| \leq 2M$ ، لذا $|f(u)| = n^{-1}|f(nu)| \leq 2M/n$ إذا كان $|u| < \delta/n$. الآن لنفترض أن s أي عدد حقيقي و r عدد قياسي بحيث $|r - s| < \delta/n$. فإن:

$$|f(s) - sf(1)| = |f(s - r) + (r - s)f(1)| \leq \frac{2M}{n} + \delta|f(1)|/n$$

بما أنه لدينا مطلق الحرية في اختيار n أي عدد كبير نرغبه فإن $f(s) - sf(1) = 0$. يوجد العديد من المجموعات E خلاف الفترات والتي لها الخاصية المستعملة في هذا الإثبات من بينها ما يسمى بالمجموعات الموجبة القياس (Positive measure) (وهنا لابد من الرجوع إلى تكامل لبيج) وكذلك بعض المجموعات قياسها صفراً، على سبيل المثال مجموعة كانتور Cantor (بند ٦). إثبات هذه الحقيقة من الممكن إعطاؤه صيغة هندسية بديهية^(٣١). خذ إحداثيات R_2 المألوفة وانشئ مجموعات كانتور في الفترات $[0, 1]$ لكلا لإحداثيين x و y وذلك بالحذف من المستوى وليس فقط الإثلاث الوسطي من الفترات ولكن أيضاً جميع النقاط من المربع $[0, 1] \times [0, 1]$ التي لها إحداثي واحد (على الأقل) في فترة محذوفة، لذا في كل خطوة تحذف بعض المناطق المظلة. كما في شكل (٧).



شكل (٧)

لنأخذ الخط الذى معادلته $y = x + c$ حيث $0 \leq c \leq 1$ فى كل خطوة، هذا الخط يقطع على الأقل واحداً من المربعات التى لم تحذف فى هذه الخطوة. هذه المربعات مغلقة ومتداخلة Nested لذا فتقاطعها يحتوى على نقطة (x, y) بحيث $y = x + c$ والنقطتان y, x تنتميان لمجموعة كانتور.

لإثبات^(٣٢) أن $f(x) = cx$ للدالة الخطية f التى منحناها غير كثيف فى R_2 نستطيع أن نرجع إلى حقيقة أولية فى نظرية الأعداد. ليكن (x_1, x_2) و (y_1, y_2) زوجين من الأعداد الحقيقية غير المتناسبة، هذا يعنى أنه $x_1 y_2 \neq x_2 y_1$ أو هندسياً. إن النقطتين (x_1, x_2) و (y_1, y_2) من R_2 لا تقعان على نفس الخط المستقيم المار بنقطة الأصل. فإنه إذا كان a و b أي عددين حقيقيين، نستطيع أن نجد عددين قياسيين r_1 و r_2 بحيث $r_1 x_1 + r_2 x_2$ و $r_1 y_1 + r_2 y_2$ يكونان قريبين بالدرجة التى نرغبها من a و b على التوالي. لإثبات ذلك نحل المعادلتين $ux_1 + x_2 v = a$ و $uy_1 + vy_2 = b$ (لأن مميزهما لا يساوى الصفر) ونختار r_1 و r_2 قريبين من u و v على الترتيب.

الآن لنفترض أن f خطية وليست على الصيغة $f(x) = ax$. الافتراض الثانى يؤدى إلى أنه من الممكن إيجاد نقطتين x_1 و x_2 بحيث $f(x_1)/x_1 \neq f(x_2)/x_2$. لذا لكل نقطة (a, b) فى R_2 نستطيع إيجاد عددين قياسيين r_1 و r_2 بحيث أن $f(r_1 x_1 + r_2 x_2) = r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2)$ يختلف قليلاً عن b وفى نفس الوقت $r_1 x_1 + r_2 x_2$ يختلف قليلاً عن a . لذا توجد نقطة على منحنى f قريبة بالدرجة التى نرغبها من النقطة (a, b) فى R_2 .

بالإمكان إعطاء إثبات آخر يبرز بعض المفاهيم الإضافية كالتالى: لنفترض أن f خطية ليست من الصيغة $f(x) = cx$. بما أن $f(r + t) = f(r) + f(t)$ و $f(r) = cr$ لكل عدد قياسي r فإنه يكفي أن نثبت أن f تأخذ عند النقاط القريبة من نقطة الأصل قيماً قريبة لكل عدد حقيقي، أو بشكل مكافئ، قيماً قريبة لكل عدد قياسي. ليكن A عدداً قياسياً موجب و $\epsilon (< 1)$ عدد صغيراً موجباً نستخدمه لتعيين درجة القرب. بما أننا نعرف أن f غير محدودة فى $(0, \epsilon)$ ، لنفترض بالتحديد أن f تأخذ قيماً موجبة كبيرة هناك. لذا يوجد عدد صحيح n أكبر من A/ϵ بحيث أنه لعدد ما s فى $(0, \epsilon)$ نحصل على $n \leq f(s) \leq n + 1$. بما أن $f(rx) = rf(x)$ لكل الأعداد القياسية r

ولكل x فإن $f(As/n) = (A/n) \cdot f(s)$ ولذا $f(As/n) \geq A$ و $A + \epsilon > A(n+1)/n \geq f(As/n) \geq A$ حيث As/n نقطة في الفترة $(0, \epsilon)$. بالتالي نكون حصلنا على نقطة قريبة من 0 حيث f تأخذ قيمة قريبة من A إذا كانت $A > 0$. إذا كانت $A < 0$ فإنه توجد نقطه قريبة من الصفر بحيث f تأخذ قيمة قريبة من $-A$ وبما أن $f(-x) = -f(x)$ فهذا يؤدي إلى نفس الاستنتاج السابق.

نورد هنا تطبيقاً في حساب التفاضل والتكامل للنظريات المتعلقة بالدوال الخطية^(٣٣).

لنفترض أن النهاية $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{x-R}^{x+R} f(u) du$ موجودة لكل عدد حقيقي x ونرمز لها بـ $\Phi(x)$. سنبين أن $\Phi(x)$ لا بد وأن تكون على الصيغة $ax + b$. أولاً

$$\int_{(x-h)-R}^{(x-h)+R} f(u) du + \int_{(x+h)-R}^{(x+h)+R} f(u) du = \int_{x-(R+h)}^{x+(R+h)} f(u) du + \int_{x-(R-h)}^{x+(R-h)} f(u) du$$

ولذا $\Phi(x-h) + \Phi(x+h) = 2\Phi(x)$. إذا استبدلنا $x-h$ و $x+h$ بـ x و y نحصل على $\Phi(x) + \Phi(y) = 2\Phi(1/2(x+y))$. الآن ضع $\Phi(x) - \Phi(0) = \psi(x)$ لنحصل على

$$\begin{aligned} (*) \quad \psi(x) + \psi(y) &= \Phi(x) + \Phi(y) - 2\Phi(0) \\ &= 2\Phi(1/2(x+y)) - 2\Phi(0) = 2\psi(1/2(x+y)) \end{aligned}$$

هذا صحيح لكل y ولذا على وجه الخصوص عندما $y=0$ نجد أن $\psi(0)=0$ و $\psi(x) = 2\psi(x/2)$. في المعادلة الأخيرة استبدل x بـ $x+y$ لنحصل على $\psi(x+y) = 2\psi(1/2(x+y))$. على كل حال (*) أعلاه تبين أن $2\psi(1/2(x+y)) = \psi(x) + \psi(y)$. لذلك فإن $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$ أي أن ψ خطية الآن ψ نهاية لدوال مستمرة ولذا لا بد وأن يكون لها نقاط استمرار (١٨). لكن نحن نعرف أن الدالة الخطية ψ التي لها نقطة استمرار تكون على الصيغة $\psi(x) = x\psi(1)$ أي أن $\Phi(x) = \Phi(0) + x\psi(1)$ وهو المطلوب إثباته.

تمرين (٢٠-١) (٣٣أ)

افترض أن $\Phi(x)$ ترمز للكمية $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{x+R} f(u)du$ وأن $\Phi(x)$ موجودة لكل عدد حقيقي x . أثبت أن $\Phi(x) = ax$.

٢١ - التفاضلات (٣٣ب)

سوف نقتصر في نقاشنا على الدوال التي مجالها في R_1 ومداها فترات في R_1 . بالإضافة إلى تفاضل دالة f والتي بالإمكان تعريفها كالعادة كما سوف نعتبر بعض التعميمات التي لها ميزة إمكانية تطبيقها على دوال ليست قابلة للتفاضل بالطريقة المألوفة. الآن تعرف تفاضلات ديني Dini باستخدام الرموز التالية:

$$f^+(x) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$f_+(x) = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$f^-(x) = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$f_-(x) = \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

حيث $+$ و $-$ ترمز لليمين واليسار على التوالي ومواضعهما (العلوية أو السفلية) ترمز للنهايات العظمى والصغرى على الترتيب. لكل دالة f ولكل x هذه التفاضلات الأربع موجودة سواء كانت محدودة أو غير محدودة.

من الشائع استعمال التعبير «تفاضل f » ليعني (حسب النص) أما العدد $f'(x)$ أي تفاضل f عند النقطة المعينة x أو الدالة f' التي قيمتها عند x العدد $f'(x)$. سوف نستعمل نفس التعبير الغامض أعلاه لتفاضلات ديني. إذا كنا سنتكلم عنها كدوال فسوف نعمم فكرة الدالة وذلك باعتبار الدوال التي قيمها ربما تضم $+\infty$ أو $-\infty$. عند هذه النقطة لابد وأن نكون حذرين عند التعامل مع هذه الدوال المعممة حيث توجد بعض الصعوبات في تحصيل المجموع أو الضرب أو في محاولة مفاضلتها.

سيجد القارئ أن التعامل بهذه التفاضلات لن يكتنفه أي شيء من هذا الغموض .
 إذاً $f^+(x) = f_+(x)$ نقول إن التفاضل من اليمين موجود عند x ونرمز له بـ $f'_+(x)$. بطريقة مشابهة نعرف $f'_-(x)$. أخيراً التفاضل المعتاد $f'(x)$ يكون موجوداً (منتهياً أو غير منته) إذا وإذا فقط كانت جميع التفاضلات الأربعة متساوية .
 حتى ولو كان $f^+(x)$ و $g^+(x)$ منتهيين فليس بالضرورة أن يكون $(f + g)^+(x) = f^+(x) + g^+(x)$ ولكن إذا كان $f'(x)$ موجوداً فإن $(f + g)^+(x) = f'(x) + g'(x)$ (انظر البند ١٥) .

تمرين (٢١-١)

اثبت أنه إذا كان $f'_+(x)$ موجوداً ومنتهياً فإن f مستمرة من اليمين عند x وأنه كان $f'(x)$ موجوداً أو منتهياً فإن f مستمرة عند x .

تمرين (٢١-٢)

بين أن f ربما تكون غير مستمرة عند x عندما تكون $f'(x)$ موجودة وغير منتهية (مساوية لـ ∞) .

من جهة أخرى لقد رأينا سابقاً أن الدالة المستمرة ليس بالضرورة أن يكون لها تفاضل (منته أو غير منته) في أي مكان .

تمرين (٢١-٣)

اثبت أنه إذا كان $f'(a)$ موجوداً (منتهياً) فباستطاعتنا كتابة
$$f(x) - f(a) = (x - a)[f'(a) + \epsilon(x)]$$
 حيث $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$.

قاعدة السلسلة للتفاضل تنص على أنه إذا كان $f'(a)$ موجوداً (منتهياً) وإذا $g(b) = a$ وإذا كان $g'(b)$ موجوداً (منتهياً) فإن الدالة Φ حيث $\Phi(x) = f(g(x))$ قابلة للتفاضل عند b أي أن تفاضلها $\Phi'(b)$ موجود ويساوي $f'(a)g'(b)$. إثبات خاطيء لذلك هو كالتالي : عندما $h \rightarrow 0$ فإن

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\rightarrow f'(g(b)) g'(a)\end{aligned}$$

تمرين (٢١-٤)

اوجد الخطأ في الإثبات السابق ومن ثم اعط إثباتاً صحيحاً باستخدام تمرين (٢١-٣).

هناك تطبيق آخر لتمرين (٢١-٣) وهو الحصول على شرط ضروري للتفاضل المحدود (هذا الشرط كافٍ أيضاً).

إذا كان نطاق f يحتوى على فترة في R_1 و a نقطة داخلية لهذه الفترة فإنه لكل ϵ موجب يوجد جوار N للنقطة a صغير لدرجة أنه إذا كانت t_1 و t_2 في N وفي اتجاهين متعاكسين من a وإذا كانت هذه هي الحالة أيضاً بالنسبة للعددين u_1 و u_2 فإن:

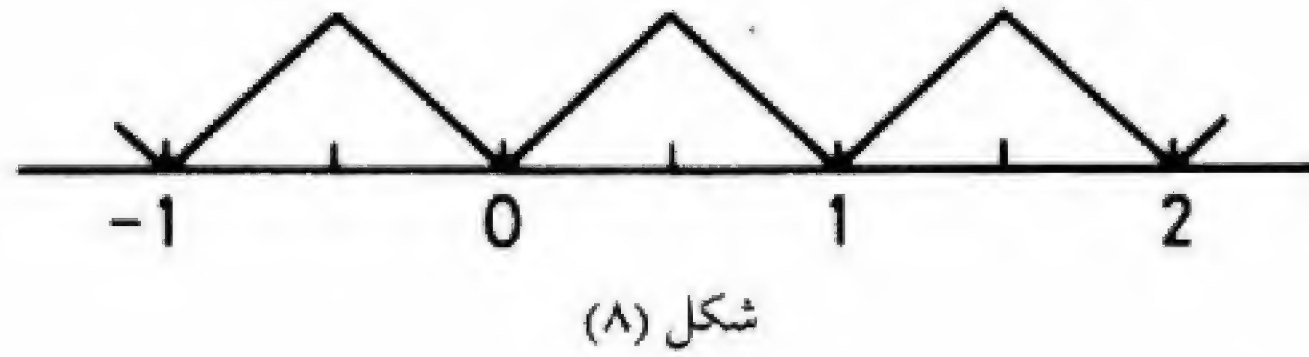
$$\left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} \right| < \epsilon$$

لاحظ أنه يكفي أن نثبت أن كل كسر في الجهة اليسرى من الممكن جعله قريباً من $f'(u)$. الآن :

$$\begin{aligned}\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} &= \frac{f(t_1) - f(a)}{t_1 - a} \cdot \frac{t_1 - a}{t_1 - t_2} - \frac{f(t_2) - f(a)}{t_2 - a} \cdot \frac{t_2 - a}{t_1 - t_2} \\ &= (f'(a) + \epsilon_1) \frac{t_1 - a}{t_1 - t_2} - (f'(a) + \epsilon_2) \frac{t_2 - a}{t_1 - t_2} \\ &= f'(a) + \epsilon_1 \frac{t_1 - a}{t_1 - t_2} - \epsilon_2 \frac{t_2 - a}{t_1 - t_2}\end{aligned}$$

حيث $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ عندما $t_1, t_2 \rightarrow a$. بما أن $|(t_1 - a)/(t_1 - t_2)| \leq 1$ و $|(t_2 - a)/(t_1 - t_2)| \leq 1$ فإننا نحصل على ضالتنا .

هذه النتيجة الأخيرة بالإمكان استخدامها للتأكد من عدم قابلية التفاضل لبعض الدوال المستمرة^(٣٤). المثال التالي يوضح ذلك: إذا كانت $G(x)$ تمثل المسافة من العدد الحقيقي x إلى أقرب عدد صحيح، فمنحنى G يشبه الشكل (٨)



لتكن $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}G_n(x)$ حيث $G_n(x) = G(2^n x)$. استمرارية H نابعة من استمرارية G ومن تقارب السلسلة بانتظام. لنفرض أن a أي نقطة و $(a - \delta, a + \delta)$ فترة تحوى a . بما أن النقاط $2^{-k}r$ تكون مجموعة كثيفة حيث k عدد صحيح موجب و r عدد صحيح فإننا نستطيع إيجاد نقطتين $x_1 = 2^{-k}r$ و $x_2 = 2^{-k}(r + 1)$ في $(a - \delta, a + \delta)$ في ناحيتين متعاكستين من a . لتكن النقطة ξ الوسطى للفترة (x_1, x_2) . المنحنى G له أركان عند النقاط $2^{-1}p$ حيث p عدد صحيح والمنحنى G_1 له أركان عند النقاط $2^{-2}p$ ، بشكل عام منحنى G_n له أركان عند النقاط 2^{-n-1} . لذلك فالمنحنيات G_0, G_1, \dots, G_{k-1} ليس لها أركان بين x_1 و x_2 ولذا فميل كل G_j ($0 \leq j \leq k-1$) بين x_1 و ξ مساو لمثيلة بين x_1 و x_2 . من جهة أخرى لكل $n > k$ نحصل على $G_n(x_1) = G_n(x_2) = 0$. لذلك

$$\frac{H(\xi) - H(x_1)}{\xi - x_1} = \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1}$$

بعد الاختصار تصبح

$$\frac{G_k(\xi) - G_k(x_1)}{\xi - x_1} = \frac{G_k(x_2) - G_k(x_1)}{x_2 - x_1} = \pm 1$$

مناقشة مشابهة تنطبق على

$$\frac{H(x_2) - H(\xi)}{x_2 - \xi} = \frac{H(x_2) - H(x_1)}{x_2 - x_1}$$

بما أنه إما ε و x_1 أو ε و x_2 في ناحيتين متعاكستين من a فالشرط الضروري للتفاضل المحدود لا يمكن أن يتحقق.

هذا يبين أن H ليس لها تفاضل منته عند أي نقطة. (بناؤنا السابق لدالة غير قابلة للتفاضل في أي مكان، واضح أن الدالة المستمرة ليس لها بالضرورة تفاضل غير محدود عند أي نقطة).

تمرين (٢١-٥)

اثبت أنه إذا كان $f'(x) > 0$ فإن f تزايدية عند x ، بمعنى أنه توجد فترة $(x-h, x+h)$ بحيث إذا كانت s و t في هذه الفترة و $s < x < t$ فإن $f(s) < f(x) < f(t)$. بشكل عام، إذا كان $f_+(x) > 0$ فإن f تزايدية من اليمين عند x .

نقول إن f لها قيمة عظمى عند x إذا وجد جوار N للنقطة x بحيث $f(y) \leq f(x)$ لجميع قيم y في N ، القيمة العظمى تكون فعلية إذا وجد جوار N' لـ x بحيث $f(y) < f(x)$ لكل y في N' و $y \neq x$.

تمرين (٢١-٦)

اثبت أنه إذا كان للدالة f قيمة عظمى عند x فإن $f^+(x) \leq 0$ و $f_-(x) \geq 0$. على وجه الخصوص إذا كان لـ f قيمة عظمى عند x وإذا كان $f'(x)$ موجوداً فإن $f'(x) = 0$. ملاحظات مشابهة تنطبق بطبيعة الحال على القيمة الصغرى. يوجد عدد قابل للعد من القيم العظمى لأي دالة f . للتأكد من ذلك لنعين للقيمة العظمى لـ f عند نقطة ما x الفترة (r_1, r_2) التي طرفيها عددين قياسيين بحيث r_1 و r_2 في ناحيتين متعاكستين من x وبحيث $f(y) < f(x)$ لكل $y \neq x$ و $r_1 < y < r_2$. هذه الفترة لا يمكن تعيينها لقيمة عظمى فعلية أخرى عند نقطة أخرى z لأنها (أي الفترة) في هذه الحالة سوف تحتوى على كل من x و z كما أنه لا بد وأن يكون $f(z) < f(x)$ وكذلك $f(x) < f(z)$. وبالتالي القيم العظمى الفعلية المختلفة لها فترات قياسية معينة مختلفة. بما أنه يوجد فقط عدد قابل للعد من الفترات التي أطرافها أعداد

قياسية لذا يوجد على الأكثر عدد قابل للعد من القيم العظمى الفعلية .
على كل حال من الممكن أن يوجد عدد غير قابل للعد من القيم العظمى غير الفعلية لدالة مستمرة . مثلاً الدالة الثابتة لها قيم عظمى غير فعلية عند جميع النقاط .
من الممكن أيضاً إثبات أن قيم أي دالة عند النقاط التي يكون فيها تفاضلها صفراً (أوحى عندما يكون واحداً من تفاضلات ديني صفراً) تكون مجموعة قياسها صفر^(٣٦) . هذه الخاصية مع الخواص العامة للتفاضل والتي سيرد ذكرها في (بند ٢١) تبين أن الإحداثي الصادي لكل القيم العظمى تكون مجموعة قياسها صفر .
من المدهش أن خاصية كون دالة هي تفاضل لدالة أخرى يضع على الأولى شروطاً ليست بالسهلة .

فلاحظ أولاً أن تفاضل دالة مستمرة قد لا يكون مستمراً ، حتى ولو كان موجوداً عند كل نقطة . لتوضيح ذلك نأخذ الدالة f المعرفة كالتالي $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ لكل $x \neq 0$ و $f(0) = 0$.

لكل $x \neq 0$ فإن $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. الآن $\lim_{x \rightarrow 0} f'$ غير موجود ومن السهولة أن نشرع ونستنتج أن $f'(0)$ غير موجود أيضاً (راجع بند ٢١) . على كل حال $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. لذا فإن $f'(0)$ موجود . في الحقيقة أن عدم وجود $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ بالتأكيد يبين أن f' غير مستمرة عند 0 (على الرغم من كونها مستمرة في كل مكان آخر) .

هذا المثال يوضح لنا مدى أهمية الجملة التالية : إن أي تفاضل (موجود ومحدود في فترة) له خاصية القيمة المتوسطة : أي أنه إذا كان له قيمتان فله جميع القيم بينهما .

تمرين (٢١-٧)

اثبت أنه من الممكن استنتاج ذلك من الحقيقة : إذا كان $f'(a) < 0$ و $f'(b) > 0$ فإنه توجد نقطة c بين a و b بحيث $f'(c) = 0$.

بقي علينا أن نثبت الحقيقة السابقة . بما أنه لدينا دالة f تناقصية عند a لأن $f'(a) < 0$ وتزايدية عند b لذا فقيمتها الصغرى في $[a, b]$ لا تحدث عند a أو b . بالتالي فهي تقع عند نقطة داخلية c ونحصل على $f'(c) = 0$.

تمرين (٢١-٨)

لتكن f دالة دورية قابلة للتفاضل و a عدداً موجباً معطى ، فإنه توجد نقطة x المماس عندها يقابل المنحنى مرة أخرى عند نقطة على بعد a الوحدات من x على الإحداثي السيني (أي أن : $f(x+a) - f(x) = af'(x)$). النص المؤلف لنظرية القيمة المتوسطة هو أنه إذا كانت f مستمرة في $[a, b]$ وكان f' موجود في (a, b) فإنه توجد نقطة c في (a, b) بحيث $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$. هذه الجملة ممكن قراءتها على أن الكسر $(f(b) - f(a))/(b - a)$ يقع بين أكبر حد أدنى $g.l.b.$ وأصغر حد أعلى $l.u.b.$ للدالة $f'(x)$ (وهذا ما يحتاج عادة إليه عملياً) أو قراءتها على أنها جملة عن القيم المحتملة لـ f' ، وذلك أن التفاضل في مكان ما يأخذ قيمة مساوية لذلك الكسر. في الحقيقة سنثبت فيما بعد حقيقتين أقوى بهذا المدلول.

نبدأ على كل حال بإعطاء الإثبات المعتاد لنظرية القيمة المتوسطة ومن ثم نورد بعض التطبيقات عليها. لنأخذ الدالة g المعرفة بالصيغة

$$g(x) = f(x) - f(a) - (f(b) - f(a)) \cdot \frac{x - a}{b - a}$$

لذا فإن $g(a) = g(b) = 0$. بالتالي فإن لـ g قيمة عظمى أو صغرى بين a و b عند نقطة c و $g'(c) = 0$ ، لكن في هذه الحالة $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. الطريقة الأخرى غير المؤلفه لإثبات ذلك هو أن نبدأ بالمساواة $g(a) = g(b) = 0$ و نستخدم نظرية الوتر الشاملة (بند ١٤) لنستنتج أنه توجد فترات (x_n, y_n) في (a, b) كل واحدة طولها نصف طول سابقتها بحيث $g(x_n) = g(y_n)$. هذه الفترات متداخلة وبالتالي تتقارب لنقطة c في الفترة المفتوحة (a, b) ، (إذا اخترنا أول فترتين بحيث يجتبان a و b). بما أنه لدينا متتالية من الأوتار الأفقية للدالة g أطرفها تقترب من c فإن المماس عند c (على افتراض وجوده) لابد وأن يكون أفقياً ، أي أن $g'(c) = 0$.

لقد افترضنا في نظرية القيمة المتوسطة أن f مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$. في الحقيقة نستطيع أن نحذف هذا الشرط عند طرفي الفترة إذا استوجبنا استمرارية f من اليمين عند a ومن اليسار عند b (في حالة وجود النهايتين

$f(a+)$ و $f(b-)$ ، وفي حالة تعذر وجودهما لا تتطلب شيئاً على الإطلاق عند طرفي الفترة. على كل حال هذا التعميم مصطنع لأنه إذا كان $f(a+)$ غير موجود و f' محدودة بالقرب من a فإن f' تأخذ كل قيمة محدودة في كل جوار أيمن للنقطة a ولذا $(b-a)f'(c)$ تأخذ كل قيمة محدودة نرغبها^(٣٧). ذلك يعزى لأنه إذا كان k أي عدد فإن $f(x) - kx$ ليس لها نهاية من اليمين عند a وبالتالي لا يمكن أن تكون مطردة على جوار أيمن لـ a . لذلك فللدالة قيم عظمى وصغرى في كل جوار أيمن لـ a ويكون بذلك تفاضلها صفراً عند تلك النقاط، أي أن $f'(x) = k$.

الاتجاه العكسي لنظرية القيمة المتوسطة خطأ بشكل عام. على سبيل المثال، إذا كانت $f(x) = x^3$ فإن $f'(0) = 0$ ، ولكن $f(b) - f(a)$ لا يساوى صفراً على الإطلاق إذا كانت $b \neq a$.

كتطبيق لهذه النظرية نثبت الآن نظرية تتعلق بمفاضلة متتالية من الدوال حداً حداً. النظرية التي ورد ذكرها في بند ١٦ تتطلب قابلية التكامل للمشتقات وإثباتها يستخدم نظرية عن تكامل متتالية من الدوال متقاربة بانتظام، لكن بالإمكان إثبات حقيقة أعم من ذلك بدون استخدام التكامل على الإطلاق، نصها كالتالي:

لنفترض أن للدوال f_n تفاضلات f'_n محدودة في فترة I وأن المتتالية $\{f_n(a)\}$ تتقارب عند نقطة ما a في I ، وأن $\{f'_n\}$ تتقارب بانتظام إلى g (مثلاً)، فإن f_n تتقارب بانتظام في I إلى نهاية f إذا كانت الفترة I متراصة وإلاً بانتظام في كل مجموعة جزئية متراصة من I ، وكذلك فإن $f'(x) = g(x)$ لكل x في I .

لإثبات ذلك نطبق أولاً نظرية القيمة المتوسطة على الدالة $f_n - f_m$:

$$f_n(x) - f_m(x) - [f_n(a) - f_m(a)] = (x - a)[f'_n(c) - f'_m(c)]$$

حيث c تقع بين x و a (وبالطبع ربما تعتمد على n و m). أيضاً تقارب $\{f'_n\}$ بانتظام وتقارب $\{f_n(a)\}$ يجعل $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام طالما $|x - a|$ محدودة. لنفترض أن f نهاية f_n وأن ϵ عدد موجب لنحصل على

$$|f_n(x) - f_m(x) - [f_n(a) - f_m(a)]| \leq (x - a) \epsilon$$

إذا كانت n و m أكبر من عدد صحيح n_0 . دع $m \rightarrow \infty$ لنحصل على

$$n > n_0 \text{ إذا } |f_n(x) - f(x) - [f_n(a) - f(a)]| \leq (x - a) \epsilon$$

أي أن

$$n > n_0 \text{ إذا } \left| \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq \epsilon$$

كذلك من فرضية التقارب المنتظم نحصل على $|f'_n(a) - g(a)| \leq \epsilon$ إذا $n > n_1$. الآن ثبت n أكبر من n_0 و n_1 . إذا كان $|x - a|$ صغيراً بقدر كاف فإن: $\left| \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - f'_n(a) \right| < \epsilon$ ولذا $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'_n(a) \right| < 2\epsilon$ إذا كان $|x - a|$ صغيراً بقدر كاف، لكن $|f'_n(a) - g(a)|$ لذا $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a) \right| < 3\epsilon$ هذه المتراجحة تبين أن $f'(a)$ موجود ويساوي $g(a)$. بما أن $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام فيمكننا أخذ a أي نقطة على الإطلاق في I وهذا ينهي إثبات هذه النظرية.

تطبيق آخر لنظرية القيمة المتوسطة ينتج عنه نظرية^(٣٨) ذات تفسير هندسي واضح. لنفترض أن f قابلة للتفاضل في $[a, b]$ وأن $f'(a) = f'(b)$ فإنه توجد نقطة c في (a, b) بحيث $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c)$. وهذا يعني أنه إذا كان منحنى f له نفس الميل عند a و b فلا بد وأن توجد نقطة c بحيث أن المماس عندها يمر بنقطة البداية $(a, f(a))$. من السهولة تصور ذلك هندسياً.

لإثبات ذلك لنفترض أن $f'(a) = f'(b) = 0$ لأنه إذا لم تكن هذه هي الحالة فسنعتبر الدالة المعرفة بالصيغة $f(x) - xf'(a)$. الدالة

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad a < x \leq b, \quad g(a) = 0$$

مستمرة في $[a, b]$ (التأكد من هذا عند النقطة a يتطلب بعض العناية) وقابلة للتفاضل في (a, b) . الآن $g'(b) = -g(b)/(b - a)$ إذا كان $g(b) > 0$ فإن $g'(b) < 0$ ولذا g تناقصية عند b (تمرين ٢١-٥) بينما $g(a) = 0$ لذا g تدرك قيمتها العظمى عند النقطة c بين a و b حيث $g'(c) = 0$ مناقشة مشابهة تنطبق في حالة كون $g(b) < 0$.

أما إذا كان $g(b) = 0$ فإن $g(a) = g(b) = 0$ ونحصل مرة أخرى على $g'(c) = 0$ لنقطة بينية c . بما أن

$$g'(c) = \frac{f'(c)}{c-a} - \frac{f(c) - f(a)}{(c-a)^2}$$

فإنه يتحقق المطلوب.

يوجد تطبيق آخر لهذه النظرية يخدم تبرير فكرة بديهية وهي أن التفاضلات أعقد في معظم الأحيان من الدوال التي اشتقت منها^(٣٩).

تمرين (٢١-٩)

إذا كانت $f(x) \geq 0$ و $f(0+) = 0$ وكانت f قابلة للتفاضل في $(0, 1]$ و $h(x) \geq 0$ و $\int h(x)dx$ متباعد عند 0 فإن $h(f(x))f'(x)$ غير محدود عندما $x \rightarrow 0$ ، مثلاً $f'(x)/f(x)$ غير محدود ولذا $f'(x)/\{f(x) \log f(x)\}$ غير محدود أيضاً (على افتراض أن $f(x) \neq 0$).

من الممكن أن نأمل في تعميم نظرية القيمة المتوسطة لحالات لا يكون فيها التفاضل بالضرورة موجوداً لكن من الواضح أن التعميم المباشر غير صحيح. على سبيل المثال إذا $f(x) = |x|$ فإن $f'_+(x) = -1$ لكل $x < 0$ و $f'_+(x) = 1$ لكل $x \geq 0$ لذا على الرغم من كون $f(1) = f(-1)$ إلا أن $f'_+(x) \neq 0$ لجميع قيم x على الإطلاق. كذلك لا نتوقع أن تتحقق هذه النظرية لأي من تفاضلات ديني. على كل حال يوجد بديل لها يتحقق لتلك التفاضلات ومن الممكن استخدامه في بعض التطبيقات^(٣٩).

هذا البديل ينص على أنه إذا كانت f مستمرة في $[a, b]$ وإذا كان c أي عدد أكبر من $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ فإننا نحصل عند عدد غير قابل للعد من النقاط x في (a, b) على $f^+(x) \leq c$. بطريقة مشابهة يوجد عدد غير قابل للعد من النقاط بحيث $f^-(x) \geq c$ إذا كان $c < [f(b) - f(a)]/(b - a)$. بشكل عام النقاط ليست نفسها في كلا الحالتين.

إثبات ذلك مشابه إلى حد كبير مثيله لنظرية القيمة المتوسطة. لنفترض أن

و $k > f(b) - f(a)$ ونأخذ الدالة $g(x) = f(x) - f(a) - k \frac{x-a}{b-a}$ لذا فإن $g(a) = 0$ و $g(b) = f(b) - f(a) - k < 0$. ليكن s أي عدد بحيث $0 = g(a) > s > g(b)$ واعتبر المجموعة من النقاط x في $[a, b]$ بحيث $g(x) \geq s$ والتي عبارة عن صورة عكسية لمجموعة مغلقة، وبما أن g مستمرة فإنها مغلقة. هذه المجموعة محدودة لذا فلها حد أعلى x_s بحيث $g(x_s) = s$ (لأن g مستمرة). بما أن $g(b) < s$ فإن $x_s < b$. بما أن $g(x_s + h) < s$ لكل h موجبة وصغيرة بقدر كاف (وذلك من تعريف x_s) نحصل على $g^+(x_s) \leq 0$ ، وبالتالي $f^+(x_s) = g^+(x_s) + \frac{k}{b-a} \leq \frac{k}{b-a} = c$. بما أن قيم مختلفة من النقاط s تولد قيماً مختلفة من x_s وبما أنه يوجد عدد غير قابل للعد من هذه النقاط بين 0 و $g(b)$ فإنه يوجد عدد غير قابل للعد من النقاط x بحيث $f^+(x) \leq c$.

من الحقائق المألوفة أنه إذا كانت f' موجودة وغير سالبة في فترة ما فإن f غير تناقصية في تلك الفترة. هذا واضح من نظرية القيمة المتوسطة لأن $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$ حيث $x < c < y$. إذا $f'(c) \geq 0$ نستنتج أن $f(y) \geq f(x)$ عندما تكون $y \geq x$.

نستطيع أن نستخدم النظرية التي أثبتناها آنفا لنحصل على نتيجة أقوى في اتجاهين: أولاً لاجابة لافتراض أن f' موجودة وثانياً نستطيع أن نحذف عدداً قابلاً للعد من النقاط. بدقه أكثر، إذا كانت f مستمرة وكان أحد تفاضلات ديني غير سالب فيما عدا ربما عند عدد قابل للعد من النقاط فإن f غير تناقصية.

لنفترض أن $f^+(x) \geq 0$ لكل $a \leq x \leq b$ فيما عدا عند عدد قابل للعد من النقاط. (الفرضية $f_+(x) \geq 0$ تؤدي إلى ذلك، والإثبات بالنسبة لـ $f^-(x)$ مشابهة). إذا لم تكن f غير تناقصية لابد وأن توجد نقطتان x و y بحيث $y > x$ و $f(y) < f(x)$. تعميمنا لنظرية القيمة المتوسطة حيث $f(y) - f(x) < c < 0$ يؤدي إلى وجود مجموعة غير قابلة للعد من النقاط (x, y) بحيث $f^+ < 0$ وهذا يناقض افتراضنا.

تمرين (٢١-١٠)

بين أن استمرارية f فرض أساسي في النظرية السابقة: انشيء دالة غير مستمرة غير تزايدية بحيث $f_+(x) \geq 0$ لجميع قيم x .

نستطيع الآن أن نثبت أنه إذا كانت f مستمرة فإن لجميع تفاضلات ديني الأربعة نفس الحدود العظمى والصغرى في أي فترة، في الواقع بشكل أعم فإن لمجموعة الكسور $[f(x-h) - f(x)]/h$ نفس هذه الحدود التي لتفاضلات ديني إذا كانت بالطبع كل من x و $x+h$ في الفترة المعطاة. لنفترض أن $f_+(x) \geq m$ وأجعل $g(x) = f(x) - mx$. بما أن $g_+(x) \geq 0$ فإن الدالة g غير تناقصية. إذا كانت $h > 0$ نحصل على $g(x+h) - g(x) \geq 0$ أي أن $f(x+h) - f(x) - (x+h)m + mx \geq 0$ وبالتالي $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq m$ ولذا فإن $f_+(x) \geq m$. بطريقة مشابهة نحصل على $\frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \geq m$ أي أن $f(x) - f(x-h) - mx + (x-h)m \geq 0$ ولذا $f_-(x) \geq m$.

بعد ذلك لنفترض أن أحد التفاضلات وليكن f^+ مستمراً عند x . هذا يعني أنه بالإمكان جعل حدوده العظمى والصغرى قريبة بالشكل الذي نرغبه من $f^+(x)$ في جوار صغير للنقطة x بقدر كاف، حسب النظرية السابقة فإن هذا ينطبق أيضاً على الحدود العظمى والصغرى للثلاث تفاضلات الأخرى وهذا يعني أنها جميعاً تساوي $f^+(x)$ عند النقطة x . لهذا فإنه إذا كان أحد التفاضلات لدالة مستمرة مستمراً عند نقطة ما فإنه يوجد تفاضل عند تلك النقطة.

هناك خطأ شائع بين الطلاب الذين يدرسون حساب التفاضل والتكامل وهو افتراضهم أن $f'(y)$ غير موجود في حالة عدم وجود النهاية $\lim_{x \rightarrow y} f'(x)$ (راجع بند (٢١)).

تمرين (٢١-١١)

اثبت وجود $f'(y)$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow y} f'(x)$ موجوداً.

أحد الأسباب التي تؤدي إلى هذا الالتباس ربما أنه إذا كان التفاضل غير مستمر فهو كذلك بشكل كبير، لهذا السبب فهذا النوع من الدوال غير شائع في

حساب التفاضل والتكامل . بشكل أدق ، لا يمكن أن يكون للمشتقة قفزة بسيطة ، أي أنه إذا كان $f'(x)$ موجوداً عند كل نقطة x من فترة ما ، وكانت النهايتان $f'(y+)$ و $f'(y-)$ موجودتين عند نقطة y في هذه الفترة فإنهما مساويتان لـ $f'(y)$. من جهة أخرى ، المثال $f(x) = |x|$ يبين أن النهايتين لـ f' من كلا الجانبين موجودتان وتختلفان عند النقطة y إذا كان $f'(y)$ غير موجود .

إن استحالة احتمال وجود قفزة بسيطة لمشتقة ما هي نتيجة مباشرة لكون المشتقة تحقق خاصية القيمة المتوسطة .

كذلك نلاحظ أنه لا يمكن أن يكون لدالة مستمرة تفاضل لانهائي في كل مكان . في الواقع أنه بالنسبة للدالة المستمرة لا بد أن يكون $f^+(x) < +\infty$ عند مجموعة غير قابلة للعد^(٤٠) . هذا واضح من التعميم لنظرية القيمة المتوسطة في (بند ٢١) . في الواقع هذا التعميم ينص على أن $f^+(x) < c$ لمجموعة غير قابلة للعد إذا كان $c > [f(b) - f(a)]/(b - a)$.

نستطيع أن نستنتج من نظرية عامة سيرد ذكرها لاحقاً أنه لكل دالة f (ليست بالضرورة مستمرة) تفاضل f_+ لانهائي من اليمين عند مجموعة قياسها صفر على الأكثر . من ناحية أخرى إذا لم تكن f مستمرة فإنه بالإمكان أن يكون $f^+(x) = +\infty$ عند كل نقطة x . من الممكن إنشاء مثال لهذه الظاهرة كالتالي^(٤١) . لنمثل العدد الحقيقي x في $[0, 1]$ في النظام الثلاثي على النحو التالي $x = 0.a_1a_2 \dots$ حيث كل a_n إما 0 و 1 أو 2 . إذا كان للعدد x تمثيلان فنختار المنتهي منهما . الآن ضع $f(x) = 0.b_1b_2 \dots$ حسب النظام الثنائي حيث $b_n = 1$ إذا $a_n = 2$ أو $b_n = 0$ في الحالات الأخرى . الآن بما أننا نحينا جانباً التمثيل الثلاثي المنتهي بتكرار 2 فإنه (أى التمثيل الثلاثي) لكل x يحتوى على متتالية لانهائية من العددين 0 أو 1 . ليكن واحداً منهما في الخانة التي ترتبها r . ولتكن x' مختلفه عن x فقط يكون 2 في الخانة r ، فإن $x' > x$ ، في الحقيقة $x' - x = 3^{-r}$ أو $x' - x = 2 \cdot 3^{-r}$. في كلتي الحالتين $f(x') - f(x) = 2^{-r}$. لذا $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq \frac{3^r}{2^r}$ وبما أنه من الممكن أن تكون r كبيرة بالقدر الذى نرغبه فإن $f^+(x) = +\infty$.

أيضاً من الممكن إثبات أن هذه الدالة مستمرة عدا عند النقاط التي لها تمثيل

ثلاثي منته وفي الحقيقة تكون مستمرة من اليمين عند هذه النقاط لكن غير مستمرة من اليسار.

من الشيق أن نعلم إنه إذا كانت دالة غير مستمرة عند نقاط من مجموعة أخرى كثيفة فإنه لابد وأن تكون مستمرة وغير قابلة للتفاضل عند نقاط من مجموعة من الفئة الثانية^(٤٢). لقد أثبتنا (بند ١٨) أنه إذا كانت f مستمرة عند نقاط من مجموعة كثيفة فإن نقاط عدم الاستمرار تكون مجموعة من فئة بير الأولى. لذا فوجود مجموعة كثيفة من نقاط الاستمرار يعني وجود عدد قليل نسبياً من نقاط عدم الاستمرار. الآن نبين أن وجود مجموعة كثيفة من نقاط عدم الاستمرار يسمح بوجود عدد قليل نسبياً من النقاط حيث يوجد التفاضل.

لتكن E_n مجموعة النقاط x بحيث أن $|y - x| < \frac{1}{n}$ يؤدي إلى $|f(y) - f(x)|/|y - x| < n$. في هذا المجال إذا ذكرنا «تفاضل» فهذا يعني تفاضل محدود (له قيمة منتهية)، لذا كل نقطة x حيث $f'(x)$ موجود تنتمي إلى إحدى المجموعات E_n . لإثبات أن مجموعة تلك النقاط من الفئة الأولى يكفي أن نثبت أن كل E_n مغلقة. لنفترض العكس أي أن E_n كثيفة في فترة مفتوحة I . هذه الفترة تحوي نقطة w حيث f غير مستمرة لذا لابد وأن يوجد عدد موجب h ومتتالية $\{y_k\}$ بحيث $y_k \rightarrow w$ و $|f(y_k) - f(w)| \geq h$. ليكن k عدد يحقق $|y_k - w| < 1/N$. بما أن E_n كثيفة في I نستطيع أن نختار x_k في E_n بحيث تقع بين y_k و w لذا $|x_k - w| < 1/N$ و $|y_k - x_k| < 1/N$. الآن

$$h \leq |f(y_k) - f(w)| \leq |f(y_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(w)|$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{|y_k - w|} &< \left| \frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - w} \right| + \left| \frac{f(x_k) - f(w)}{y_k - w} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k} \right| + \left| \frac{f(x_k) - f(w)}{w - x_k} \right| < 2N \end{aligned}$$

لأن $x_k \in E_n$. دع $y_k \rightarrow w$ لنحصل على تعارض.

الآن نلاحظ أنه إذا كان واحد من تفاضلات ديني لدالة مستمرة مساوياً للصفر في فترة ما فإن الدالة ثابتة هناك لأنه قد أثبتنا أنها تكون غير تزايدية وغير تناقصية

معاً. وهذا يؤدي إلى أنه إذا كان لأي دالتين مستمرتين نفس التفاضل المحدود في فترة ما فهما يختلفان هناك بثابت فقط. من جهة أخرى من الممكن أن توجد دالتان مستمرتان لهما نفس التفاضل الذي لا بد أن يكون لانهائياً عند بعض النقاط في فترة ما ولا يختلفان بثابت هناك (راجع بند ٢٢).

هناك الكثير من الحقائق المتعلقة بمشتقات دالة اختيارية سوف نذكر نص بعض منها بدون إثبات^(٤٣). أولاً فيما عدا عند نقاط من مجموعة قابلة للعد، التفاضل العلوي من ناحية لا يقل عن التفاضل السفلي من الناحية الأخرى. أيضاً، إذا كان $f^+ = +\infty$ في مجموعة E فإن $f_- = -\infty$ في E فيما عدا مجموعة قياسها صفر، وبطريقة مشابهة إذا كان $f_+ = -\infty$ فإن $f^- = +\infty$ فيما عدا مجموعة قياسها صفر. أخيراً قياس المجموعة حيث f^+ و f_- محدودان ومختلفان يساوى صفر. إذا ربطنا هذه الحقائق مع بعضها نرى أنه، فيما عدا عند مجموعة قياسها صفر، توجد ثلاثة احتمالات فقط:

- (١) يوجد تفاضل محدود.
- (٢) التفاضلان العلويان يساويان $+\infty$ والتفاضلان السفليان يساويان $-\infty$.
- (٣) التفاضل العلوي من ناحية يساوى $+\infty$ والتفاضل السفلي من الناحية الأخرى يساوى $-\infty$.

والتفاضلان الآخران محدودان ومتساويان. بما أن الاحتمال الأول فقط ينطبق على الدالة المطردة فبالتالي نرى أن لها تفاضل محدود تقريباً في كل مكان. سوف نعطي إثبات مباشر لهذا في البند القادم. أيضاً من الممكن أن نستخلص من النظرية العامة أنه إذا كانت جميع التفاضلات محدودة تقريباً في كل مكان فإن للدالة تفاضل في كل مكان تقريباً.

٢٢ - الدوال المطردة (Monotonic Functions)

تسمى الدالة f من فترة I في R_1 إلى R_1 مطردة إذا كانت إما غير تناقصية أو غير تزايدية، أي أن f مطردة إذا كان إما $f(y) \geq f(x)$ أو $f(y) \leq f(x)$ عندما $y > x$ و x, y في I . إذا كان واحد من هذين الشرطين متحققاً بدون مساواة فإننا نقول إن f مطردة

فعلية Strictly monotonic . الدوال المألوفة المستخدمة في حساب التفاضل والتكامل إذا لم تكن مطردة فإنها على الأقل مطردة على كل قطعة Piecewise monotonic . بالتالي إذا كانت $f(x) = x^2$ فإنها تناقصية عندما $x < 0$ وتزايدية عندما $x > 0$ ، إذا كانت $f(x) = \sin x$ فإن f تزايدية وتناقصية بالتناوب في الفترات $(-\pi, \pi)$ ، $(\pi, 3\pi)$ وهكذا ، وإذا كانت $f(x) = e^x$ فإن f تزايدية في كل R_1 . جميع هذه الدوال مستمرة . من جهة أخرى الدالة f المعرفة بـ $f(x) = [x]$ (أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي x) غير تناقصية وغير مستمرة عند كل عدد صحيح x .

تمرين (٢٢-١)

بين أن الدالة المطردة محدودة في كل فترة جزئية متراصة من نطاقها .

تمرين (٢٢-٢)

بين أن الدالة المطردة تقترب لنهاية محدودة من كل جهة عند كل نقطة داخلية من نطاقها .

تمرين (٢٢-٣)

اثبت أن نهاية متتالية متقاربة نقطياً من الدوال المطردة تكون دالة مطردة .
يقال إن للدالة f قفزة Jump عند نقطة x من نطاقها إذا كان لها نهايتان من جانبي x لكنها غير مستمرة عند x . من تمرين (٢٢-٢) نستطيع أن نقول إن نقاط عدم الاستمرار لدالة مطردة هي عبارة عن قفزات فقط . أبسط الدوال المطردة التي بالإمكان تخيلها هي تلك التي لها عدد محدود من القفزات ، لكن بالإمكان أن يكون لها تركيب أعقد من ذلك . مثلاً ، إذا كانت $f(x) = 2^{-n}$ في الفترة $[1/(n+1), 1/n]$ فإن f غير تناقصية ذات قفزات لها نقطة نهاية عند الصفر .

يوجد عدد لانهائي قابل للعد على الأكثر من القفزات للدالة المطردة لأن الفترات من $f(x-)$ إلى $f(x+)$ إذا لم تكن خالية فإنها مجموعة من الفترات المنفصلة في R_1 (منفصلة لأن f مطردة) وتلك المجموعة قابلة للعد (ارجع بند ٥) . على كل حال سوف نثبت أن المجموعة التي تحتوى على قفزات دالة مطردة من الممكن أن تكون أي

مجموعة قابلة للعد على الإطلاق حتى بالإمكان أن تكون كثيفة، كجميع النقاط القياسية في فترة ما مثلاً. لتكن $\{x_n\}$ مجموعة معطاة قابلة للعد و j_n أعداداً موجبة بحيث $\sum j_n < \infty$. نعرف الدوال f_n بوضع $f_n(x) = 0$ لكل $x < x_n$ و $f_n(x) = j_n$ لكل $x \geq x_n$. بطبيعة الحال لن تكون الأعداد x_n مرتبة بشكل تزايدى. السلسلة $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام (راجع اختبار فيرشتراس بند ١٦) لأن $|f_n(x)| \leq j_n$ و $\sum j_n$ متقاربة. إذا كانت x_0 أي x_n فهي نقطة استمرار لجميع الدوال f_n فهي نقطة استمرار للدالة f (بند ١٦). من جهة أخرى إذا كانت x_m إحدى النقاط x_n فإن دالة واحدة فقط f_m غير مستمرة عند x_m . لذا $\sum_{n \neq m} f_n = f - f_m$ تكون مستمرة عند x_m . بالتالي f غير مستمرة عند x_m لأنها مجموع دالتين إحداها مستمرة والأخرى غير مستمرة هناك. في الواقع f لها قفزة بمقدار j_m عند x_m . من المعقول أن نسمي مثل هذه الدالة f دالة ذات قفزة صريحة أو فعلية Pure jump. بشكل عام نسمي f دالة ذات قفزة صريحة إذا أنشئت بطريقة مشابهة ولكن من المحتمل أن يكون لها قفزان واحدة من الجهة اليمنى والأخرى من الجهة اليسرى بحيث $f(x_m-) \neq f(x_m) \neq f(x_m+)$. إذا أنشأنا دالة ذات قفزة صريحة بحيث قفزاتها من الجهة اليمنى والجهة اليسرى هي تلك التي لدالة معطاة g غير تناقصية فإن $g - f$ تكون أيضاً غير تناقصية وكذلك مستمرة.

ربما يبدو من البديهي أن الدالة ذات القفزة الصريحة لا بد وأن يكون تفاضلها يساوى صفراً فيما عدا عند قفزاتها. هذا التخمين قريب من الصحة: تفاضل دالة ذات قفزة صريحة يساوى الصفر فيما عدا عند مجموعة قياسها صفراً، لكن هذه المجموعة ربما تحتوى على نقاط أكثر من القفزات^(٤٤). عن طريق مناقشة بعض الحالات الخاصة نستطيع أن نحصل على فكرة أفضل لما يمكن أن يحدث. لتكن f دالة من ذلك النوع وقفزاتها بمقدار 2^{-n} عند النقاط 3^{-n} , $n = 1, 2, \dots$ ، لتكن g ذات قفزة صريحة وقفزاتها بمقدار 3^{-n} عند النقاط 2^{-n} و $f(0) = g(0) = 0$ ، فإن f و g مستمرتان (من اليمين) عند الصفر. على كل حال من السهل أن نثبت أن $f'_+(0) = +\infty$ بينما $g'_+(0) = 0$. في الحقيقة إذا كانت $h > 0$ نحصل على $(f(0+h) - f(0))/h = f(h)/h$ وإذا كانت $3^{-m-1} < h < 3^{-m}$ فإن

إذا كانت $f(h) = \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-m}$ لذا $f(h)/h > 3^m/2^n \rightarrow \infty$ بطريقة مشابهة، إذا كانت $g(h) = \sum_{k=m+1}^{\infty} 3^{-k} = 1/2 \cdot 3^{-m}$ نحصل على $2^{-m-1} < h < 2^{-m}$ لذا $g(h)/h < 2^m/3^m \rightarrow 0$.

تمرين (٢٢-٤)

أنشئ دالة مطردة ذات قفزة صريحة بحيث يكون 0 نقطة نهاية لقفزاتها ويكون $f'_+(0)$ موجباً ومحدوداً.

يبدو أنه لا توجد طريقة أبسط بشكل رئيسي لإثبات أن للدالة ذات قفزة صريحة تفاضلاً مساوياً للصفر في كل مكان تقريباً فيما عدا اللجوء إلى النظرية العامة (التي سنثبتها الآن) والتي تنص على أن لكل دالة مطردة تفاضلاً محدوداً في كل مكان تقريباً.

إن الشيء المدهش حقاً هو إمكانية وجود دالة مستمرة مطردة ليست ثابتة وتفاضلها يساوي صفراً تقريباً في كل مكان. الدالة التي تتمتع بهذه الخاصية تسمى دوالاً شاذة مطردة Singular monotonic. سوف ننشئ دالة من هذا النوع بشيء من التفصيل لأنه بالإمكان استخدامها في تطبيقات متعددة. من الممكن أيضاً الحصول على دالة مشابهة غير ثابتة في أي فترة لكن بناء مثل هذه الدالة بطبيعة الحال سيكون أكثر تعقيداً ولذا سوف نغفله^(٤٥). سوف نعتمد في بنائنا لهذه الدالة على مجموعة كانتور المذكورة في البند ٦، هذه الدالة ثابتة في كل فترة متممة لهذه المجموعة ولذا فتفاضلها سيكون بالتأكيد مساوياً للصفر فيما عدا ربما عند نقاط مجموعة كانتور، والتي قياسها صفر. إذا كانت X أي نقطة في الفترة [0, 1] نكتب $a_1 a_2 a_3 \dots$ في $X = 0$ في النظام الثلاثي لذا كل a_k إما 0 أو 1 أو 2. أطراف الفترات المتممة لمجموعة كانتور هي الأعداد التي تمثيلها الثلاثي منته بحيث يمكن كتابتها بدون استخدام 1، على سبيل المثال $0.022 \dots = 0.100 \dots = 1/3$ ، $0.200 \dots = 2/3$. إذا نصفنا جميع الأعداد في ذلك التمثيل وفسرنا النتيجة على أنها عدد مكتوب في النظام الثنائي نحصل على الأعداد المتساوية $0.0111 \dots$ و $0.100 \dots$ (في النظام الثنائي).

هذا ينطبق على زوج من طرفي فترة متممة. لنعرف دالة f بكتابة جميع النقاط

x المجموعة كانتور في النظام الثلاثي بحيث لا نستخدم 1 وبتنصيف جميع الأعداد تم بوضع $f(x)$ تساوى العدد الناتج مفسراً حسب النظام الثنائي. بهذا نكون عرفنا f على مجموعة كانتور وقد رأينا أنفاً أن للدالة f نفس القيمة عند طرفي كل فترة متممة. نستطيع أن نوسع f لجميع النقاط في $[0, 1]$ بواسطة إعطائها في كل فترة متممة نفس القيمة التي لها في طرفي هذه الفترة. الآن لابد أن نثبت أن f مطردة ومستمرة ومن المناسب أيضاً دراسة تفاضلات f عند نقاط مجموعة كانتور.

إذا كانت x و y نقطتين من مجموعة كانتور ليست بأطراف فترة وكانت $x < y$ فإن التمثيل الثلاثي للعدد x و y هو

$$y = 0 \cdot a_1 a_2 a_3 \dots a_n b_{n+1} \dots, \quad x = 0 \cdot a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \dots$$

حيث $b_{n+1} > a_{n+1}$. التمثيل الثنائي لـ $f(x)$ و $f(y)$ متطابق إلى الخانة النونية بينما الخانة $n+1$ لـ $f(y)$ أكبر بواحد من الخانة $n+1$ للعدد $f(x)$. هذا يعني أن $f(y) > f(x)$. لذا f غير تناقصية.

بما أن f مستمرة في الفترات التي تكون فيها ثابتة لذا يلزمنا أن نعتبر استمراريتها عند نقاط مجموعة كانتور فقط. لتكن x إحدى هذه النقاط. أي جوار لـ x يحتوى على كل النقاط y من مجموعة كانتور التي تبعد عن x بما لا يزيد عن 3^{-n} أي أنه يحتوى على جميع النقاط التي تختلف عن x بالأعداد التي تمثيلها الثلاثي يبدأ بـ n من الأصفار على الأقل. التمثيل الثنائي لـ $f(y)$ إذن يختلف عن مثيله لـ $f(x)$ بعدد تمثيله الثنائي يبدأ بـ n من الأصفار على الأقل، لذا $f(y)$ تبعد عن $f(x)$ بما لا يزيد عن 2^{-n} . بما أن قيمة $f(y)$ لأي نقطة y ليست من ضمن مجموعة كانتور لكنها في نفس الجوار لـ x تساوى قيمة f عند أي من طرفي الفترة المتممة الحاوية على y ، لذا فإن f مستمرة عند x .

بالتالي نكون قد أثبتنا أن f مستمرة ومطرودة وغير ثابتة وشاذة. الآن نبحث في قابلية f للتفاضل عند نقاط مجموعة كانتور. عند الطرف الأيسر لفترة متممة، التفاضل من اليمين f_+ موجود ويساوى صفراً، بطريقة مشابهة $f_-(x)$ عند الطرف

الأيمن x . لنعتبر أولاً المشتقات عند أطراف الفترات المتممة، على وجه التحديد عند الطرف الأيمن $a_1 a_2 \dots a_n 000 \dots$. $x = 0$. إذا كانت h بين 3^{-m} و 3^{-m-1} و $m > n$ فإن $f(x+h)$ تبعد عن $f(x)$ بمقدار بين 2^{-m} و 2^{-m-1} لذا فإن $[f(x+h) - f(x)]/h$ لا بد وأن تقع بين $\frac{2^{-m}}{3^{-m-1}}$ و $\frac{2^{-m-1}}{3^{-m}}$ لذا عندما $h \rightarrow 0$ (وبذلك $m \rightarrow \infty$) هذا الكسريؤول إلى $+\infty$. أي أنه عند الطرف الأيمن لانحصل على $f'_+(x) = +\infty$ و $f_-(x) = 0$. بطريقة مشابهة $f'_-(x) = +\infty$ و $f'_+(x) = 0$ عند الطرف الأيسر.

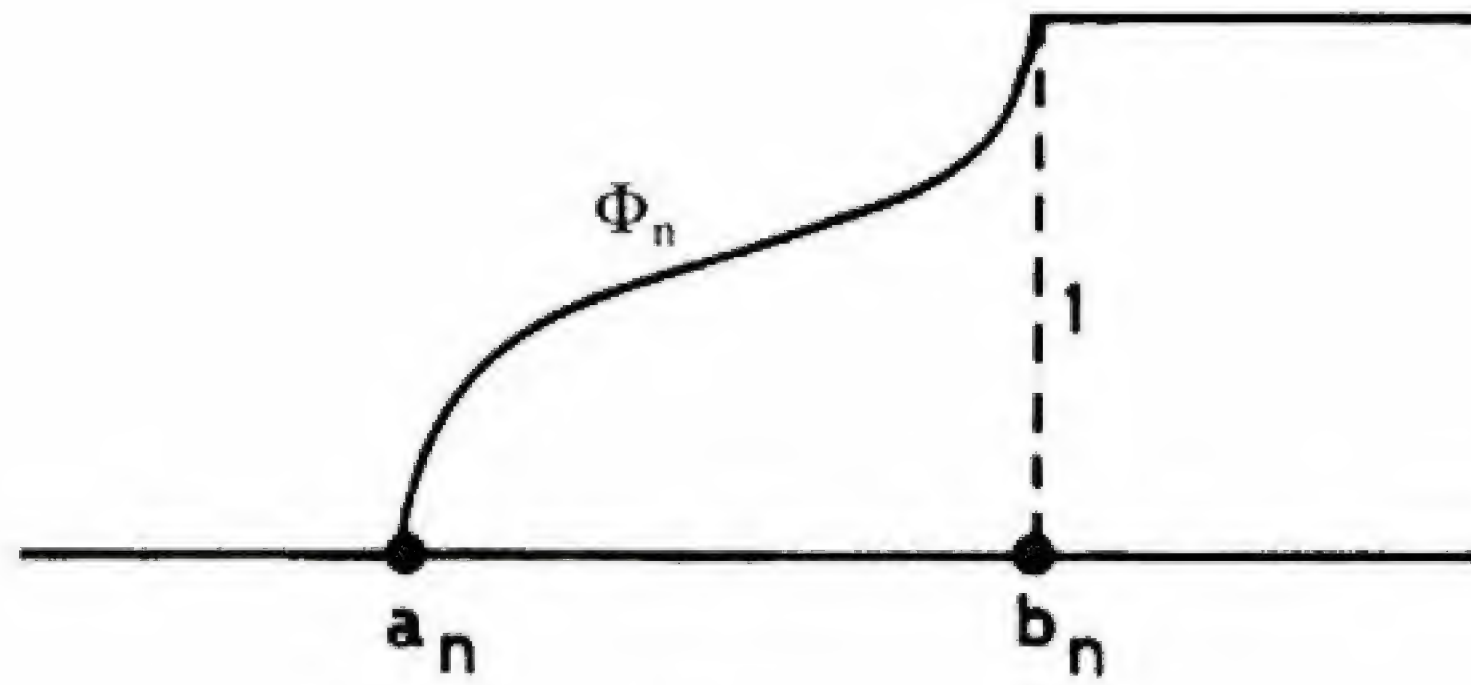
عند نقاط النهاية التي ليست أطرافاً من الممكن إثبات أن $f^+ = +\infty$ بينما f_+ تأخذ أي قيمة بين صفر و $+\infty$.

كتطبيق لهذه الدالة الشاذة نستطيع أن ننشئ المثال الذي ورد ذكره في (بند ٣) لدالتين لهما نفس التفاضلات (غير محدودة عند بعض النقاط) في فترة ما لكن لا يختلفان بثابت . نحتاج بجانب الدالة الشاذة التي انشأناها آنفاً دالة أخرى g تكون مستمرة وغير تناقصية ولها تفاضل محدود عند كل نقطة لا تنتمي لمجموعة كانتور، وتفاضل يساوي $+\infty$ عند كل نقطة من هذه المجموعة . عندما نحصل على مثل هذه الدالة g نستطيع أن نضع $h(x) = f(x) + g(x)$ وبالتالي $h'(x) = g'(x) = +\infty$ عند كل نقاط مجموعة كانتور (وذلك لأن جميع مشتقات f غير سالبة) . كذلك $h'(x) = g'(x)$ عند كل النقاط التي لا تنتمي إلى هذه المجموعة لأن $f'(x) = 0$ عند مثل تلك النقاط . على كل حال g و h يختلفان بمقدار يساوي f وهذا ليس بثابت .

الآن نبين كيفية بناء g ^(٤٦) . لنسرد الفترات المتممة (a_n, b_n) لمجموعة كانتور بترتيب تناقصي بالنسبة لأطوالها (ترتيب الفترات المحدودة العدد ذات الطول نفسه لا أهمية له هنا) . كما في شكل (٩) .

لتكن $\Phi(n)$ دالة مستمرة غير تناقصية لها المنحنى المبين أعلاه : $\Phi_n(x) = 0$ لكل $x < a_n$ ، $\Phi_n(x) = 1$ لكل $x > b_n$ ، $\Phi'_n + (a_n) = \Phi'_n - (b_n) = +\infty$. (على سبيل المثال)

$$(\Phi_n(x) = (2/\pi)\tan^{-1}\{(x - a_n)^{1/2}(b_n - x)^{-1/2}\})$$

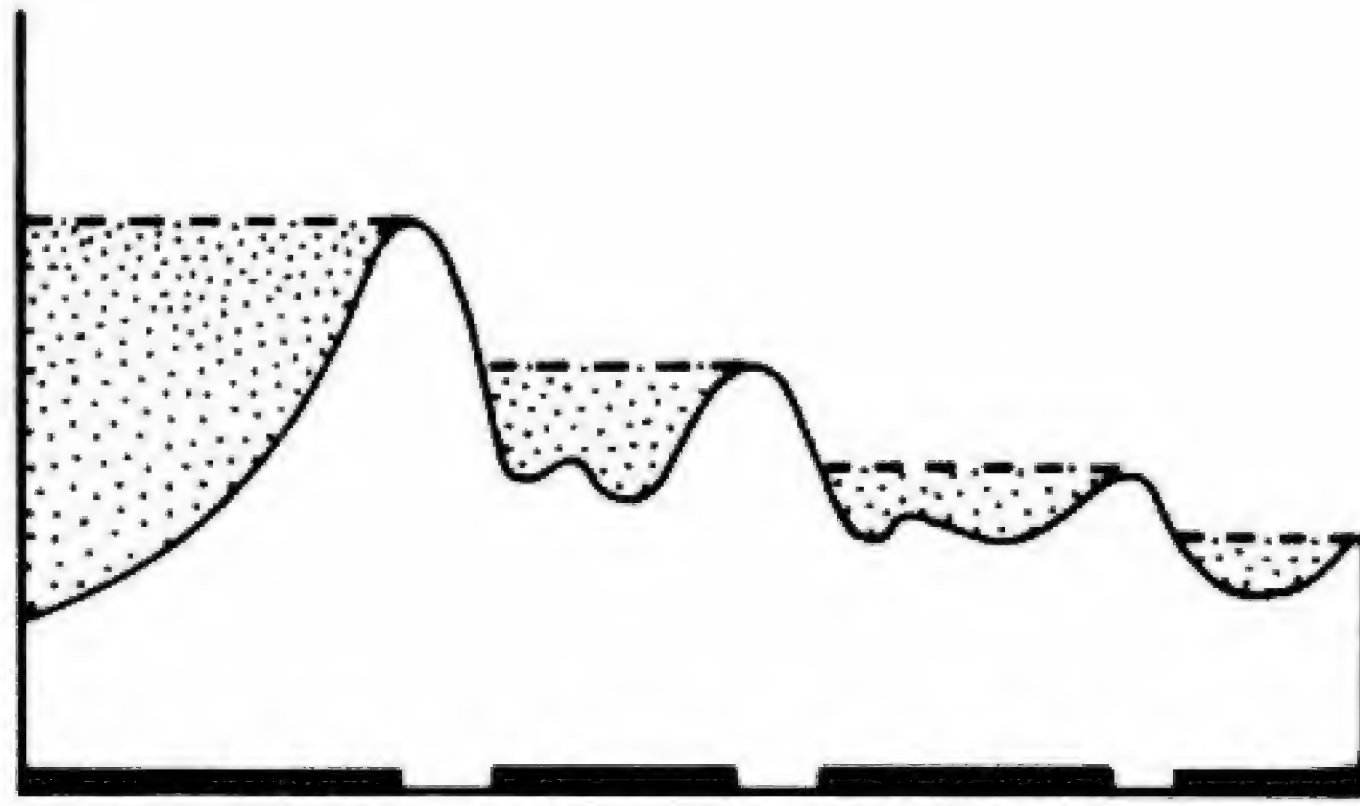


شكل (٩)

الآن نلاحظ أن أطوال الفترات (a_n, b_n) تساوي مضاعفات صحيحة سالبة للعدد 3. لتكن $h_n = (2/5)^m$ عندما يكون طول (a_n, b_n) يساوي 3^{-m} وعرف $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \Phi_n(x)$ أي أن $g(x)$ تساوي مجموع الأعداد h_n على جميع (a_n, b_n) الواقعة على يسار x بالإضافة إلى $h_k \Phi_k(x)$ إذا كانت x تنتمي إلى (a_k, b_k) . الآن توجد 2^{m-1} من الفترات (a_n, b_n) طول كل منها 3^{-m} و $h_n = (2/5)^m$ في كل منها لذا $\sum h_n$ متقاربة، وبالتالي فالسلسلة التي تعرف g متقاربة بانتظام ولذا g مستمرة. كذلك نلاحظ أنها غير تناقصية. لتكن x نقطة من مجموعة كانتور تختلف عن a_n ودع $\delta > 0$. الكسر $\Delta = \delta^{-1}\{g(x + \delta) - g(x)\} = \delta^{-1}h_n\{\Phi_n(x + \delta) - \Phi_n(x)\}$ أكبر من h_k إذا كانت الفترة $(x, x + \delta)$ تحتوي على فترة متممة (a_k, b_k) . من السهل أن نرى أن $(x, x + \delta)$ دائماً تحتوي على فترة متممة طولها $\delta/9 \geq 3^{-m}$. لذا $\Delta \geq (2/5)^m/\delta \geq 1/9 \cdot 3^m(2/5)^m \rightarrow \infty$ وبالتالي $f'_+(x) = +\infty$. إذا كانت x تساوي a_n فإن $g'_+(x) = +\infty$. بطريقة مشابهة $g'_-(x) = +\infty$ عند كل x في مجموعة كانتور. أي أن $g'(x) = +\infty$ عند كل x في تلك المجموعة.

الآن نرجع إلى الإثبات الصعب نوعاً ما للحقيقة التالية للدالة المطردة تفاضلاً محدوداً في كل مكان تقريباً^(٤٧). بإمكان القارئ أن يقفز إلى (بند ٢٢) إذا كان مهتماً أولاً برؤية بعض التطبيقات لهذه النظرية. الإثبات يعتمد على نتيجة تعزي إلى ريز Riesz وتعرف بنتيجة «الماء المتدفق» أو «الشمس الشارقة». إذا كانت g دالة مستمرة من فترة I إلى R_1 وإذا كان منحنى g هو مقطع لمجرى نهر و E مجموعة النقاط حيث يجري الماء فإن من البديهي أن تتكون E من فترات مفتوحة بحيث g تأخذ قيماً

متساوية عند أطرافها وإذا كان المنحنى هو ظل جبل وكانت الشمس تشرق في اتجاه الإحداثي السيني الموجب وإذا كانت E هي مجموعة النقاط التي في الظل فمرة أخرى من البديهي أن E تتكون من فترات مفتوحة بحيث g تأخذ قيماً متساوية عند أطرافها (في كلتي الحالتين ربما توجد فترة متميزة في الطرف الأيسر كما في الشكل (١٠)).



شكل (١٠)

فيما يلي النص التجريدي للنتيجة: لتكن g دالة مستمرة في فترة I فيما عدا بعض القفزات ولتكن G معرفة كما يلي $G(x) = \max (g(x-), g(x), g(x+))$ المجموعة E من النقاط x بحيث توجد $x < y$ و $g(y) > G(x)$ تكون مجموعة مفتوحة وإذا كان (a, b) أي فترة من الفترات التي تتكون منها E فإن $g(a+) \leq G(b)$.

إذا بدلنا اليسار باليمين وعرفنا E' لتكون المجموعة من النقاط x بحيث يوجد $x > y$ و $g(y) > G(x)$ فإنه بطريقة مشابهة، إذا كانت E' اتحاد الفترات المفتوحة (a', b') فإننا نحصل على $G(a') \geq g(b'-)$.

سنثبت أولاً أن E مفتوحة. لتكن $x_0 \in E$ فإنه توجد $x_0 < y$ بحيث $g(y) > G(x_0)$. يلزمنا أن نثبت أن هذه الخاصية تتحقق لجميع x بالقرب من x_0 . إذا تحركت x بمقدار ضئيل إلى اليسار من x_0 فإن $g(x_0)$ يكون قريباً من $g(x-)$ وإذا تحركت بمقدار ضئيل إلى اليمين فإن $g(x_0)$ يكون قريباً من $g(x+)$; في كلتي الحالتين $G(x)$ لا تزيد عن $G(x_0)$ إلا بمقدار ضئيل فقط. بما أن $g(y) > G(x_0)$ نحصل أيضاً على $g(y) > G(x)$ طالما $G(x)$ لا تزيد عن $G(x_0)$ إلا بمقدار ضئيل وهذه هي الحالة إذا كانت x قريبة من x_0 .

لإثبات الجزء الثاني من النتيجة ليكن (a, b) إحدى الفترات التي تتكون منها E بحيث b لا تنتمي إلى E . لتكن $a < x < b$ فإنه يكفي أن نثبت أن $g(x) \leq G(b)$ ومن ثم دع $x \rightarrow a+$. بما أن $x \in E$ فإنه توجد نقاط $y > x$ بحيث $g(y) > G(x)$ ولذا $G(y) \geq g(x)$. الآن نبين أن b من تلك النقاط إذا لم تكن هذه هي الحالة فإن $G(b) < g(x)$. لتكن z_1 أصغر حد علوي للنقاط z في $[x, b]$ بحيث $G(z) \geq g(x)$. (يوجد مثل تلك النقاط على سبيل المثال x ونحن نحاول أن نثبت أن $z_1 = b$). إذا كانت $z_1 \neq b$ فإن z_1 تنتمي إلى E وبالتالي توجد $y > z_1$ بحيث $g(y) > G(z_1)$ مخالفًا لتعريف z لذا $y > b$. ولكن بما أن b لا تنتمي إلى E فإن $g(y) \leq G(b)$. بالتالي إذا كانت $G(b) < g(x)$ فإن $g(x) \leq G(z_1) < g(y) \leq G(b) < g(x)$ وهذا غير ممكن.

سوف نستنتج قابلية التفاضل لدالة غير تناقصية من نتيجتين لنظرية ريز. سنصل إليهما عن طريق إثبات أولاً أن نظريتنا ستتحقق إذا أثبتنا أن $f^+(x) < +\infty$ وأن $f^+(x) < f_-(x)$ في كل مكان تقريباً. لتبسيط الرموز نفترض أن منتصف الفترة (a, b) عند الصفر. الآن نستطيع أن نعكس منحنى f حول نقطة الأصل لنحصل على منحنى الدالة f_0 التي قيمتها عند x تساوى $-f(-x)$. هذه الدالة غير تناقصية أيضاً وتفاضلها السفلي من اليمين عند x يساوى تفاضل f السفلي من اليسار عند $-x$ ؛ في الحقيقة

$$\begin{aligned} \frac{f_0(x+h) - f_0(x)}{h} &= \frac{-f(-x-h) - (-f(-x))}{h} \\ &= \frac{f(-x+(-h)) - f(-x)}{-h} \end{aligned}$$

إذا كان $f^+(x) \leq f_-(x)$ يتحقق في كل مكان تقريباً لكل f غير تناقصية فإنه يتحقق أيضاً إذا استبدلنا f بـ f_0 و x بـ $-x$. أي أن $f^-(x) \leq f_+(x)$ لجميع قيم x تقريباً ولذا $f^+(x) \leq f_-(x) \leq f^-(x) \leq f_+(x)$ لجميع قيم x تقريباً.

إذا كان $f^+(x) < \infty$ لجميع قيم x تقريباً فالمراجعة السابقة تبين أن كل التفاضلات الأربعة متساوية ومحدودة لجميع قيم x تقريباً، أي أنه يوجد تفاضل محدود لجميع قيم x تقريباً.

الآن نستطيع أن نبسط المسألة أكثر من ذلك فيكفي أن نثبت أن قياس المجموعة حيث $f_-(x) < r < R < f_+(x)$ يساوى صفراً مهما كانت قيمة r و R . لأنه إذا $f_+(x) > f_-(x)$ فإنه يوجد عدداً قياسيان r و R بحيث $f_-(x) < r < R < f_+(x)$ بما أنه يوجد عدد قابل للعد فقط من الأزواج من الأعداد القياسية فإن المجموعة حيث $f_+(x) > f_-(x)$ محتواة في اتحاد عدد قابل للعد من المجموعات التي قياسها صفراً ولذا فقياسها يساوى صفراً.

فيما يلي نص النتيجة لنظرية ريز والتي يعتمد عليهما الإثبات

(١) لتكن f غير تناقصية في $[a, b]$ و E_R مجموعة نقاط استمرار f و $f_+(x) > R$ فإنه بالإمكان تغطية E_R بمجموعة قابلة للعد من الفترات (a_k, b_k) مجموع أطوالها $\sum (b_k - a_k)$ يساوى على الأكثر:

$$R^{-1} \sum [f(b_k+) - f(a_k+)] \leq [f(b-) - f(a+)]/R$$

(٢) لتكن f غير تناقصية في $[a, b]$ و E_r مجموعة نقاط استمرار f و $f_-(x) < r$ فإنه بالإمكان تغطية E_r بمجموعة قابلة للعد من الفترات (a_k, b_k) بحيث:

$$\sum [f(b_k-) - f(a_k+)] \leq r \sum (b_k - a_k) \leq r(b - a)$$

سوف نؤجل إثبات هاتين النتيجتين حتى نبين كيف نستنتج النظرية منهما. أولاً نلاحظ أن (١) تؤدي إلى أن $f_+(x) < +\infty$ في كل مكان تقريباً. لأنه إذا كان $f_+(x) = +\infty$ في E فإن الافتراض في (١) ينطبق لكل R موجب ولذا تكون E مغطاه بفترات (a_k, b_k) مجموع أطوالها يساوى على الأكثر $[f(b-) - f(a+)]/R$ لكل R . أي أن E مغطاة بفترات ذات طول صغير اختياري لذا قياسها يساوى صفراً. بعد ذلك لنعتبر المجموعة E حيث f مستمرة و $f_-(x) < r < R < f_+(x)$ ، ولذا كلا الافتراضين في (١) و (٢) متحققان باستخدام (١) لكل من الفترات (a_k, b_k) في (٢) نجد أن الجزء من E في (a_k, b_k) مغطى بفترات مجموع أطوالها (نسميه L_k مثلاً) يساوى $\{f(b_k-) - f(a_k+)\}/R$ على الأكثر. بجمع هذه المتراجحات لجميع (a_k, b_k) وبتطبيق (c) نجد أن:

$$\sum L_k \leq (1/R) \sum \{f(b_k -) - f(a_k +)\} \leq (r/R)(b - a)$$

نفس النقاش السابق ينطبق على أي فترة جزئية من (a, b) أي أن الجزء من E في أي فترة (p, q) يكون مغطى بفترات مجموع أطوالها يساوي على الأكثر $(r/R)(q - p)$. الآن لتكن E مغطاه (بأي طريقة) بفترات جزئية (p_k, q_k) (سواء أكانت متداخلة أم لم تكن). بالإمكان تغطية الجزء من E في (p_k, q_k) بفترات غير متداخلة مجموع أطوالها $(r/R)(q_k - p_k)$ على الأكثر ولذا من الممكن تغطية E بفترات مجموع أطوالها $(r/R) \sum (q_k - p_k)$ على الأكثر. وجود مثل هذا الغطاء يؤدي إلى أن قياس E يساوي صفراً (تمرين ١١-١).

الآن نرجع إلى إثبات (١) و (٢).

(١) إذا كانت $x \in E_R$ فإنه توجد $y > x$ بحيث $\{f(y) - f(x)\}/(y - x) > R$ أي أن $f(y) - Ry > f(x) - Rx$. طبق نظرية ريز على الدالة g حيث $g(x) = f(x) - Rx$. بما أن f مستمرة عند x فذلك g و $G(x) = g(x)$. لذا نستنتج أن E_R مغطاة بمجموعة قابلة للعد من الفترات (a_k, b_k) بحيث $G(b_k) \geq g(a_k +)$ ، أي أن $f(b_k +) - Rb_k \geq f(a_k +) - Ra_k$ ولذا $f(b_k +) - f(a_k) \geq R(b_k - a_k)$ بجمع هذه المتراجحات لقيم k المختلفة وباستعمال الحقيقة أن f غير تناقصية نحصل على:

$$R \sum (b_k - a_k) \leq \sum (f(b_k +) - f(a_k +))$$

(٢) إذا كانت $x \in E_r$ فإنه توجد $y < x$ بحيث $\{f(y) - f(x)\}/(y - x) < r$ (وذلك لأنه $y < x$) أي أن $f(y) - ry > f(x) - rx$ يمكن تطبيق نظرية ريز بعد عكس المتراجحة السابقة على الدالة g المعرفة بـ $g(x) = f(x) - rx$ ، لنجد أن E_r مغطاة بمجموعة من الفترات (a_k, b_k) بحيث $g(b_k -) \leq G(a_k)$. بما أن f غير تناقصية فوجود مثل هذا الغطاء يقتضي أن $f(b_k -) - rb_k \leq f(a_k +) - ra_k$ أي أن $f(b_k -) - f(a_k +) \leq r(b_k - a_k)$ بالجمع على جميع الفترات نحصل على الاستنتاج في (٢).

الآن نعطي بعض التطبيقات الشيقة لنظرية تفاضل الدوال المطردة والتي تساعد على تبرير الجهد الذي بذل لإثبات هذه النظرية .

(أ) تفاضل سلسلة من الدوال المطردة (نظرية فوبيني Fubini^(٤٨)) .

لتكن $f_1 + f_2 + \dots$ سلسلة من الدوال غير التناقضية المتقاربة نقطياً في فترة ما $[a, b]$ ومجموعها S . فإنه تقريباً لكل x في $[a, b]$ نحصل على $f_1'(x) + f_2'(x) + \dots = S'(x)$.

هذا مثال واحد لنظرية من الأسهل أن نكتب نصها بدلالة سلسلة بدلاً من متتاليات .

إذا استثنينا مجموعة قياسها صفر فإنه لجميع الدوال f_n تفاضلات غير سالبة وكذلك للدالة S لأنها أيضاً غير تناقصية . حدود السلسلة $f_1'(x) + f_2'(x) + \dots$ غير سالبة ولذا فمجاميعها الجزئية $S_n'(x)$ تكون متتالية غير تناقصية (لكل x) . لذا فهي متقاربة إذا كانت مجاميعها الجزئية محدودة . لكن :

$$\begin{aligned} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} &= \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \dots \\ &\geq \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \dots + \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \end{aligned}$$

وذلك لأن f_n غير تناقصية . دع $h \rightarrow 0$ لنستنتج أن $S'(x) \geq S_n'(x)$ حيثما كان الطرف الأيسر محدود، أي في كل مكان تقريباً . لذا فسلسلة التفاضلات متقاربة لكل x ويبقى علينا فقط أن نتأكد من أنها تؤول إلى المجموع الصحيح .

لكي نتعرف على مجموع سلسلة التفاضلات ، أولاً نبين أنه توجد متتالية جزئية من مجاميعها الجزئية تتقارب إلى $S'(x)$ في كل مكان تقريباً . نلاحظ أن $S(b) - S_n(b) \rightarrow 0$ ، لذا لابد وأن توجد متتالية جزئية من الأعداد الصحيحة n بحيث $\sum (S(b) - s_n(b))$ تكون متقاربة (نختار n التي تجعل الفرق أقل من $1/2$ ومن ثم نختارها أكبر من العدد السابق بحيث تجعل الفرق أقل من $1/4$ وهكذا) . لقيم n في هذه المتتالية الجزئية نحصل على $S(x) - S_n(x) \leq S(b) - S_n(b)$ لأن $S(x) - S_n(x)$ هو ذيل السلسلة $S(x)$ ولذا يعرف دالة غير تناقصية . بالتالي $\sum [S(x) - S_n(x)]$

(مجموعة لنفس قيم n السابقة) تكون سلسلة متقاربة من الدوال غير التناقضية. كما أثبتنا آنفاً فإن سلسلة التفاضلات $\Sigma [S'(x) - S'_n(x)]$ متقاربة في كل مكان تقريباً، ولذلك فحدها العام يقترب من الصفر في كل مكان تقريباً. أي أننا قد وجدنا متتالية جزئية من المجاميع الجزئية $S_n(x)$ بحيث $S'_n(x) \rightarrow S'(x)$ في كل مكان تقريباً. بما أن المتتالية بكاملها من المجاميع الجزئية متقاربة في كل مكان تقريباً فلا بد أن تكون متقاربة إلى نهاية المتتالية الجزئية، أي إلى $S'(x)$.

(ب) كثافة المجموعات

لتكن E مجموعة في R_1 . نقول إن النقطة x (سواء أكانت في E أم لم تكن) هي نقطة تكثف Density للمجموعة E إذا كانت الجوارات الصغيرة بقدر كاف لـ x تحتوى «بشكل كبير» على نقاط من E . ليس من السهل صياغة هذا التعريف بشكل دقيق. أولاً لنعط E بعدد قابل للعد من الفترات المفتوحة. بالإمكان عمل هذا بعدة طرق: نأخذ أكبر حد سفلي لمجموع أطوال هذه الأغشية على أساس أنه قياس لحجم E ونسميه القياس الخارجي Outermeasure لـ E ونرمز له بـ $\mu(E)$. إذا كانت I فترة فإن $\mu(I)$ يمثل طولها المعتاد. إذا كانت E_1 و E_2 مجموعتين تقعان في فترتين منفصلتين فإن $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$. الآن دع N ترمز لجوار للنقطة x فنقول إن x نقطة تكثف لـ E إذا كان $\mu(E \cap N)/\mu(N) \rightarrow 1$ عندما $\mu(N) \rightarrow 0$ ، أي بمعنى إذا كان القياس الخارجي للجزء من E الواقع في جوار صغير لـ x يساوى تقريباً طول هذا الجوار. هناك تعريف مشابه لهذا بالنسبة لمجموعات في R_n .

سوف نثبت الآن أن جميع نقاط E تقريباً هي نقاط تكثف لـ E . بشكل عام هذا يعني كل فترة تقريباً (قارن ذلك مع تمرين ١١-١). نفس النظرية تتحقق أيضاً في R_n .

لنفترض أن قياس E ليس بصفر وإلا كانت النظرية خالية المحتوى. بالإمكان الافتراض أيضاً أن E محدودة وبالتالي تقع في فترة ما متراسة I . عرف الدالة λ بوضع $\lambda(x)$ تساوى القياس الخارجي للجزء من E الواقع يسار x إذا كانت λ غير تناقصية فنثبت أن $\lambda'(x) = 1$ تقريباً لكل قيم x في E .

لتكن f دالة مشابهة لـ λ نحصل عليها باستعمال غطاء ثابت لـ E بعدد قابل

للعِد من الفترات، أي أن $f(x)$ تساوى الطول الكلي لفترات هذا الغطاء الواقعة على يسار x . الآن $f'(x) = 1$ عندما $x \in E$ ، لأنه إذا كانت $x \in E$ و h صغيرة بقدر كاف فإن $x + h$ تقع في إحدى الفترات المفتوحة المغطاة لـ x ، ولذا $f(x + h) - f(x) = h$. خذ متتالية من الأغطية لـ E مجموع أطوالها μ_n تقترب من $\mu(E)$ بسرعة كافية بحيث $\sum (\mu_n - \mu(E))$ تكون متقاربة. لتكن f_n الدالة f المرتبطة بالغطاء النوني. لذا $f_n(x) \rightarrow \lambda$ و $f_n(x) - \lambda(x) \leq \mu_n - \mu(E)$ بالإضافة إلى ذلك فإن $f_n - \lambda$ دالة غير تناقصية. الآن $\sum [f_n(x) - \lambda(x)]$ متقاربة وبواسطة نظرية فوبيني سلسلة التفاضلات $\sum [f'_n(x) - \lambda'(x)]$ متقاربة في كل مكان. لذا فحدود هذه السلسلة تقترب من الصفر في كل مكان تقريباً. بما أن $f'_n(x) = 1$ في كل مكان تقريباً في E فلا بد أن تكون $\lambda'(x) = 1$ في كل مكان تقريباً في E .

(ج) قياس المحل الهندسي^(٤٩) The Measure of Locus

لتكن F مجموعة متراسة في R_1 . إذا كانت x لا تنتمي إلى F فإنه توجد مسافة موجبة من x إلى F وهذه المسافة تحصل من x إلى نقطة ما في F (تمرين ٨-٩). لنأخذ المجموعة E_r من النقاط التي على مسافة r من F حيث $r > 0$ ، فإن قياس E_r صفر، لأنه إذا لم يكن كذلك فإنها (E_r) تحتوى على نقطة تكثف، لتكن y تلك النقطة ولتكن x نقطة في F على مسافة r من y . الجوار N للنقطة x الذى نصف قطره r لا يمكن أن يحتوى على أي نقطة من E_r لأن جميع نقاط N تقع على مسافة أقل من r من النقطة y . لأن أي جوار I للنقطة y نصفه في N ولذا $I \cap C(E_r)$ يحتوى على فترة طولها على الأقل نصف طول I . وجود مثل هذه الفترات يناقض افتراض أن y نقطة تكثف للمجموعة E_r .

٢٣ - الدوال المحدبة (Convex Functions)

نقتصر في هذا النقاش على الدوال من فترة في R_1 إلى R_1 . عادة تسمى الدالة محدبة إذا كان الجزء من منحناها في كل فترة يقع على أو أسفل وترها. سوف نثبت الحقيقة الملفتة للنظر وهي أن الدالة المستمرة تكون محدبة إذا افترضنا فقط أن نقطة المنتصف لكل وتر تقع على أو فوق منحنى f . في الحقيقة بالإمكان الاستغناء عن شرط

الاستمرارية بافتراض أن الدالة محدودة في فترة ما صغيرة^(٥٠). لذا إذا كان لدالة غير مستمرة الخاصية السابقة (المتعلقة بوضع النقطة الوسطى) فإن منحناها لابد وأن يأخذ شكل عشوائي. لدوال الخطية غير المستمرة المذكورة في بند ٢٠ تعطينا مثالا لذلك النوع من الدوال.

من الممكن صياغة الجملة الهندسية المتعلقة بالوتر تحليلياً كما يلي:

إذا ذكرنا ان منتصف أي وتر يقع على أو فوق المنحنى فهذا يعني أن $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ لكل x و y في النطاق، وإذا قلنا إن كل الوتر يقع على أو فوق المنحنى فهذا يعني أن $f(q_1x + q_2y) \leq q_1f(x) + q_2f(y)$ طالما $q_1 + q_2 = 1$ و $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$. سوف نثبت أنه عندما تكون f مستمرة فإن المتراجحة الأولى (لكل x و y) تقتضي الثانية.

من الأسهل أن نكتب المتراجحة الأولى بصيغة مختلفة نوعاً ما. ضع $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ لذا فإن $\Delta_h \Delta_k f(x) = f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)$. بعد ذلك نكتب $\Delta_h \Delta_h f(x) = \Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$ ولذا فإن المتراجحة المتعلقة بالنقطة الوسطى تعني أن $\Delta_h^2 f(x) \geq 0$ عندما تكون x و $x+2h$ في نطاق الدالة f . (هنا h ربما تكون موجبة أو سالبة).
بالإمكان صياغة المتراجحة الثانية كالتالي: -

$$(*) \quad \frac{\Delta_g f(x)}{g} \leq \frac{\Delta_h f(x)}{h}, \quad 0 < g < h$$

وذلك بأخذ $z = q_1x + q_2y$ و $h = y - x$ و $g = z - x$. هذا يعني أنه إذا ثبتنا النقطة اليسرى من الوتر فإن ميله يكون دالة تزايدية بدلالة طوله. لإثبات أن الدالة المستمرة التي تحقق التعريف الأول للتحذب تحقق أيضاً التعريف الآخر، يلزمنا أن نستنتج (*) من $\Delta_h^2 f(x) \geq 0$. لعمل ذلك^(٥١)، نبدأ بالمتطابقة $\Delta_h f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{h/n} f(x + ih/n)$ حيث n أي عدد صحيح موجب. إذا أثرنّا على الجانبين بالمؤثر $\Delta_{h/n}$ Operator نحصل (إذا كانت $x + h + h/n$ لاتزال في نطاق الدالة) على $\Delta_{h/n} \Delta_h f(x) = \sum_{i=1}^n \Delta_{h/n}^2 f(x + ih/n) \geq 0$.

أي أن $\Delta_h f(x + h/n) - \Delta_h f(x) \geq 0$ أو بشكل آخر $\Delta_h f(x + h/n) \geq \Delta_h f(x)$. بما أن هذه المتراجحة صحيحة لكل قيم x بحيث أن جميع النقاط في الصيغة أعلاه من ضمن النطاق فإننا نستطيع استبدال x بكل من $x + h/n$, $x + 2h/n$, ... ولذا نجد أنه لأي عدد صحيح موجب m :

$$\Delta_h f(x + mh/n) \geq \Delta_h f(x + (m-1)h/n) \geq \dots \geq \Delta_h f(x + h/n) \geq \Delta_h f(x)$$

الآن إذا كانت x و $x + \delta$ و h أعداد معطاة، نستطيع أن نجد متتاليات من الأعداد القياسية m/n بحيث $\delta \rightarrow mh/n$. بعد ذلك نستخدم استمرارية f لنستنتج :

$$\Delta_h f(x + mh/n) \geq \Delta_h f(x) \text{ من } \Delta_h f(x + \delta) \geq \Delta_h f(x) .$$

لقد أثبتنا الآن أن $\Delta_h f(x)$ يزداد بزيادة x لكل h . على وجه الخصوص

$$\Delta_{h/n} f(x) \leq \Delta_{h/n} f(x + h/n) \leq \dots \leq \Delta_{h/n} f(x + (n-1)h/n)$$

لتكن $0 < m < n$. معدل أول m من الحدود لهذه السلسلة من المتراجحات لا يزيد عن معدل أول n من حدودها . أي أن :

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta_{h/n} f(x) + \Delta_{h/n} f(x + h/n) + \dots + \Delta_{h/n} f(x + (m-1)h/n)}{m} \\ & \leq \frac{\Delta_{h/n} f(x) + \dots + \Delta_{h/n} f(x + (n-1)h/n)}{n} \end{aligned}$$

نختصر البسطين لنحصل على :

$$\frac{f(x + mh/n) - f(x)}{m} \leq \frac{f(x + h) - f(x)}{n}$$

أي أنه إذا كانت $h > 0$ فإن :

$$\frac{f(x + mh/n) - f(x)}{mh/n} \leq \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

إذا كانت $0 < g < h$ فإننا نستطيع اختيار متتالين من الكسور القياسية m/n بحيث $m/n \rightarrow g/h$ وبذلك نتحقق (*) .

من (*) وبدون افتراض أن f مستمرة نستطيع أن نستنتج ليس فقط أن f مستمرة عند كل نقطة داخلية في الفترات التي تكون فيها f محدبة بل أيضاً أن لها تفاضل محدود من الجهة اليمنى وآخر محدود من الجهة اليسرى عند تلك النقاط، هذان التفاضلان غير تناقصيين. بما أن الدالة المطردة مستمرة فيما عدا عند عدد قابل للعد من القفزات فإن التفاضل من الجهة اليمنى للدالة المحدبة حسب (*) يكون مستمراً فيما عدا (ربما) عند مجموعة قابلة للعد. هذا يعني على وجه الخصوص أن الدالة المحدبة تكون مستمرة أيضاً. في الحقيقة، النقاط الوحيدة التي لانستطيع استنتاج استمرارية f عندها هي تلك النقاط حيث التفاضل من الجهة اليمنى يختلف عن نظيره من الجهة اليسرى. عند مثل تلك النقاط الدالة مستمرة من كل جهة لذا فإن لها على الأسوأ قفزة بسيطة، لكن عند القفزة البسيطة لا يمكن أن يكون لها تفاضلان محدودان من كلا الجانبين.

الآن نستنتج الجملة السابقة عن التفاضلات من (*). نلاحظ أن (*) تعني أن $\Delta_h f(x)/h$ تعرف، لكل x ، دالة تزايدية في h . عندما $h \rightarrow 0+$ هذه النسبة بالتالي تؤول إلى نهاية، حسب علمنا حتى الآن، قد تكون محدودة أو غير محدودة. أي أن $f'_+(x)$ موجود (سواء كان محدود أو لم يكن) لكل نقطة x داخلية في الفترة المعنية. إذا كانت h سالبة نستنتج بطريقة مشابهة أن $f'_-(x)$ موجود.

نلاحظ أيضاً أنه إذا كانت h موجبة فإن الكمية $\Delta_h f(x)$ تزايدية في x لكل h ثابتة وتزايدية في h لكل x ثابتة (كما يتضح هندسياً). لنفرض أن $0 < g < h$ و $x < y$. بتطبيق الحقيقتين السابقتين نحصل على $\frac{\Delta_g f(x)}{g} \leq \frac{\Delta_h f(x)}{h} \leq \frac{\Delta_h f(y)}{h}$. ثبت h و دع $g \rightarrow 0$ لنستنتج أن $f'_+(x) < +\infty$. بطريقة مشابهة نحصل على $f'_-(x) > -\infty$ كذلك فإن:

$$\frac{\Delta_{-g} f(x)}{-g} = \frac{f(x-g) - f(x)}{-g} = \frac{f(x) - f(x-g)}{g} = \frac{\Delta_g f(x-g)}{g} \leq \frac{\Delta_g f(x)}{g}$$

ولذا $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. أخيراً بما أن :

$$\frac{\Delta_h f(x)}{h} \leq \frac{\Delta_h f(y)}{h}, \quad y > x$$

نستنتج أن f'_+ غير تناقصية وكذلك الحال بالنسبة للدالة f'_- .

نلاحظ أن خاصية التحدب المألوفة في حساب التفاضل والتكامل في الواقع كافية . لنفترض $f''(x)$ موجود وغير سالب عند كل نقطة من فترة ما . إذاً لكل x بداخل هذه الفترة ولكل h موجبة وصغيرة نحصل (عن طريق تطبيق نظرية القيمة المتوسطة مرتين) على :

$$f(x+2h) - f(x+h) = hf'(x+c_1), \quad x+h < c_1 < x+2h$$

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+c_2), \quad x < c_2 < x+h$$

$$\Delta^2 f(x) = h[f'(x+c_1) - f'(x+c_2)]$$

$$= h(c_1 - c_2)f''(c_3) \geq 0$$

مناقشة شبيهة بذلك تنطبق عندما $h < 0$. إذن f محدبة حسب تعريف النقطة الوسطى .

سوف نعمم الآن الخاصية المعرفة للدوال المحدبة : ليس فقط إن كل وتر يقع على أو فوق المنحنى لكن لو وضعنا أوزان عشوائية موجبة على n من النقاط في المنحنى فمركز ثقلها سوف يقع أيضاً على أو فوق المنحنى . الجملة الأخيرة تعني جبرياً أنه إذا $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$ فإن

$$* \quad f(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n) \leq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \dots + q_n f(x_n)$$

عندما $n = 2$ فهذا يعني أن المنحنى يقع تحت الوتر . (المقارنة * بالخاصية السابقة لا بد من كتابة x_1, x_2 بدلا من x, y .

الآن نثبت * بالاستقراء وسنكتب الخطوة الأولى بشيء من التفصيل (وذلك من نقطتين إلى ثلاث نقاط) لأن الحالة العامة مشابهة لذلك . الآن

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3) = f\left(\frac{q_1x_1 + q_2x_2}{q_1 + q_2} (q_1 + q_2) + q_3x_3\right)$$

بتطبيق مانعرفه على النقطتين $(q_1x_1 + q_2x_2)/(q_1 + q_2)$ و x_3 وباستعمال الوزنين $q_1 + q_2$ و q_3 نحصل على

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3) \leq (q_1 + q_2)f\left(\frac{q_1x_1 + q_2x_2}{q_1 + q_2}\right) + q_3f(x_3)$$

الآن باستخدام النقطتين x_1, x_2 والوزنين $q_1/(q_1 + q_2)$ و $q_2/(q_1 + q_2)$ نجد أن

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3) \leq (q_1 + q_2) \cdot \frac{q_1}{q_1 + q_2} \cdot f(x_1) + (q_1 + q_2) \frac{q_2}{q_1 + q_2} f(x_2)$$

$$+ q_3f(x_3) = q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + q_3f(x_3)$$

الصيغة * مصدر خصب لمتراجحات عن الأعداد الموجبة^(٥٢). على سبيل المثال الدالة المعرفة بـ $f(x) = -\log x$, $x > 0$ محدبة (لأن مشتقتها الثانية موجبة)، لذا:

$$q_1 + \dots + q_n = 1 \text{ إذا } -\log(q_1x_1 + \dots + q_nx_n) \leq -q_1 \log x_1 - \dots - q_n \log x_n$$

أي أنه $q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n \geq x_1x_2 \dots x_n$. هذه المتراجحة تعني أن المتوسط الهندسي لنون من الأعداد الموجبة لايزيد عن متوسطها الحسابي. بالمثل، إذا كانت $f(x) = x^r$ حيث $r > 1$ فإن f محدبة لكل $x > 0$ ولذا

$$(q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n)^r \leq q_1x_1^r + q_2x_2^r + \dots + q_nx_n^r$$

لأي n من الأعداد الموجبة x_k في حالة أن $q_1 + \dots + q_n = 1$. نختصر هذه المتراجحة بكتابتها كالتالي $(\sum q_k x_k)^r \leq \sum q_k x_k^r$. الآن لتكن p_k أعداداً موجبة ولنأخذ $q_k = p_k / \sum p_k$ لنجد أن $(\sum p_k x_k / \sum p_k)^r \leq \sum p_k x_k^r / \sum p_k$ أي أن

$$S p_k x_k \leq (\sum p_k)^{1-1/r} (\sum p_k x_k^r)^{1/r}$$

إذا وضعنا $x_k = z_k y_k^{-1/(r-1)}$ و $p_k = y_k^{r/(r-1)}$ نحصل على

$$\sum y_k z_k \leq (\sum y_k^{r/(r-1)})^{(r-1)/r} (\sum z_k^r)^{1/r}$$

المعروفة بمتراجحة هولدر Holder . الحالة الخاصة عندما $r = 2$:

$$\sum y_k z_k \leq (\sum y_k^2)^{1/2} (\sum z_k^2)^{1/2}$$

تعرف باسم متراجحة كوشي Cauchy .

يمكن أن نستنتج متراجحة منكوسكي Minkowski (بند ٤) من متراجحة كوشي كالتالي :

لنفترض مرة أخرى أن $\sum q_k = 1$ ، فإن :

$$\begin{aligned} S &= \sum q_k (a_k + b_k)^2 = \sum q_k a_k (a_k + b_k) + \sum q_k b_k (a_k + b_k) \\ &= \sum (q_k^{1/2} a_k) q_k^{1/2} (a_k + b_k) \\ &\quad + \sum (q_k^{1/2} b_k) q_k^{1/2} (a_k + b_k) \end{aligned}$$

بتطبيق متراجحة كوشي لكل مجموع في الجهة اليمنى نجد أن :

$$\begin{aligned} S &\leq \{ \sum q_k a_k^2 \sum q_k (a_k + b_k)^2 \}^{1/2} + \{ \sum q_k b_k^2 \sum q_k (a_k + b_k)^2 \}^{1/2} \\ &= \{ \sum q_k (a_k + b_k)^2 \}^{1/2} [\{ \sum q_k a_k^2 \}^{1/2} + \{ \sum q_k b_k^2 \}^{1/2}] \\ &\quad \{ \sum q_k (a_k + b_k)^2 \}^{1/2} \leq \{ \sum q_k a_k^2 \}^{1/2} + \{ \sum q_k b_k^2 \}^{1/2} \end{aligned}$$

لذا

الآن خذ $q_k = \frac{1}{n}$ لتصبح المتراجحة السابقة

$$\{ \sum (a_k + b_k)^2 \}^{1/2} \leq \{ \sum a_k^2 \}^{1/2} + \{ \sum b_k^2 \}^{1/2}$$

في الإمكان بطبيعة الحال إثبات هذه المتراجحة بطريقة مباشرة . نفس الإثبات السابق مع تغيير طفيف باستخدام متراجحة هولدر بدلاً من كوشي يبين لنا أنه إذا كان $r > 1$ فإن :

$$\{\sum (a_k + b_k + \dots)^r\}^{1/r} \leq \{\sum a_k^r\}^{1/r} + \{\sum b_k^r\}^{1/r} + \dots$$

وهذه هي الصيغة العامة لمراجعة منكوسكي .

٢٤ - الدوال القابلة للتفاضل من جميع الرتب Infinitely Differentiable Functions

الآن نعتبر الدوال التي بالإمكان مفاضلتها أكثر من مرة أو حتى عدد لا نهائي من المرات . يوجد تعميم لنظرية القيمة المتوسطة لمثل تلك الدوال يعرف باسم نظرية تيلر Taylor مع باقي سوف لانخوض في الدواعي لاعتبار هذه الصيغة ولن نحاول أن نحصل عليها تحت أعم الافتراضات الممكنة . على كل حال سوف نحصل على الصيغة بإحدى الأشكال التي يكون فيها الباقي أجدي نفعاً .

لنفترض أن f دالة نطاقها يحوى الفترة $[a, x]$ وأن $f^{(n)}$ موجودة ومستمرة أو على الأقل بالإمكان مكاملتها لنحصل على $f^{(n-1)}$ ($n \geq 1$) . لنبدأ من :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(a) - \int_a^x f'(t)d(x-t)$$

ونكامل بالتجزئة (إذا كانت $n \geq 2$) لنحصل على :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt$$

بتكرار هذه العملية نحصل أخيراً على :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt \quad \text{حيث}$$

لتوضيح إحدى طرق استعمل نظرية تيلر سوف نثبت النظرية التالية : لنفرض أن f دالة معرفة على فترة ما $[x_0, \infty)$ وأن f' مستمرة وأن

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0 \quad \text{فإننا نحصل على} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = 0$$

لإثبات ذلك نعتبر نظرية تيلر بحيث يكون الباقي من الرتبة الثانية ونصعها الصيغة :

$$f'(a) = \frac{f(a) - f(x)}{x - a} + \frac{1}{x - a} \int_a^x (x - t) f''(t) dt, \quad x > a$$

لتكن x_0 كبيرة لدرجة أن $|f(t)| < \epsilon$ لكل $t > x_0$ و $|f''(t)| < \epsilon$ لكل $t > x_0$. بالتالي إذا كان $a > x$ فإن :

$$\begin{aligned} |f'(a)| &\leq \frac{2\epsilon}{x - a} + \frac{\epsilon}{x - a} \int_a^x (x - t) dt \\ &= \frac{2\epsilon}{x - a} + \frac{\epsilon(x - a)}{2} = \epsilon \left(\frac{2}{x - a} + \frac{x - a}{2} \right) \end{aligned}$$

هنا x اختيارية طالما أن $x > a$ ، لتكن $x = a + 2$ (السبب لهذا الاختيار يكمن في أن الكمية $2/(x - a) + (x - a)/2$ تكون أصغر ما يمكن عندما $x = a + 2$) . بهذا الخيار تصعب المتراجحة السابقة $|f'(a)| \leq 2\epsilon$ ، $a > x_0$ وهذا يعني أن $f'(a) \rightarrow 0$ عندما $a \rightarrow \infty$.

بعض التغيرات الطفيفة في الإثبات تعطي نتائج أقوى نوعاً ما^(٥٣) . على سبيل المثال لا حاجة لافتراض أن $f(x) \rightarrow 0$ ، فيكفي أن تكون $f(x)$ محدودة طالما $f''(x) \rightarrow 0$. لإثبات ذلك نفترض أن $|f(x)| \leq M$ ونضع $\epsilon(x) = \max_{t \geq x} |f''(t)|$. الآن من الواضح أن ϵ دالة غير تزايدية وأن $\lim_{x \rightarrow \infty} \epsilon(x) = 0$. الآن

$$\begin{aligned} |f'(a)| &\leq \frac{2M}{x - a} + \frac{1}{x - a} \int_a^x (x - t) \epsilon(t) dt \\ &\leq \frac{2M}{x - a} + \frac{\epsilon(a)}{2} (x - a) \end{aligned}$$

واختر x بحيث $x - a = \{\epsilon(a)\}^{-1/2}$ لتحصل على

$$|f'(a)| \leq 2M\{\epsilon(a)\}^{1/2} + 1/2\{\epsilon(a)\}^{1/2}$$

ولذا فإن $f'(a) \rightarrow 0$ مرة أخرى .

من المغري أن ندع $n \rightarrow \infty$ في نظرية تيلر ونحصل على سلسلة لانهاية تسمى سلسلة تيلر للدالة $f(x)$. إذا كان $R_n(x) \rightarrow 0$ (لقيمة معينة لـ x) فالسلسلة التي نحصل عليها ستكون متقاربة وفي الحقيقة ستتقارب إلى $f(x)$. على كل حال يجب أن لانفترض أن هذا ما يحدث دائماً إذا كان للدالة f تفاضلات بجميع الرتب على الرغم من أنه يتحقق لعدة دوال بسيطة تواجهنا في حساب التفاضل والتكامل.

في المقام الأول، سلسلة تيلر ربما تكون متباعدة، في المقام الثاني، ربما تكون متقاربة لكن للمجموع الخاطيء. سوف نعطي أمثلة لكلا الاحتمالين^(٥٤).

من الطبيعي أن سلسلة تيلر ليس بالضرورة أن تكون متقاربة في كل النطاق الذي تكون فيه الدالة أصلية قابلة للتفاضل بجميع الرتب. على سبيل المثال، الدالة $f(x) = 1/(1 + x^2)$ قابلة للتفاضل بجميع الرتب في كل R_1 لكن سلسلة تيلر لها (التي مركزها عند الصفر) متقاربة فقط لكل $|x| < 1$.

أشياء أسوأ من ذلك ممكن أن تحدث. سوف نعطي مثلاً لدالة بحيث سلسلتها التيلرية تكون متباعدة في كل مكان ماعدا بطبيعة الحال عند النقطة a نفسها. لنعتبر الدالة f المعرفة بالسلسلة $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos b_n x$ حيث a_n أعداد موجبة صغيرة و b_n أعداد موجبة صحيحة تؤول إلى ∞ وأخيراً $\sum a_n b_n^k$ متقاربة لكل عدد صحيح موجب k (مثلاً $a_n = e^{-n}$ و $b_n = n^2$). بما أن السلسلات التي نحصل عليها عن طريق التفاضل حداً حداً جميعها متقاربة بانتظام فإن f قابلة للتفاضل بجميع الرتب. من جهة أخرى لنشر f بواسطة سلسلة تيلر حول الصفر. في هذه الحالة علينا فقط أن نعتبر الحدود زوجية الرتبة لأن التفاضلات فردية الرتبة للجيب تساوى صفراً عند الصفر. القيمة المطلقة للحد من سلسلة تيلر الذي يحوى $f^{(2k)}$ هي :

$$\frac{x^{2k} |f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} = \frac{x^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n^{2k}}{(2k)!}$$

الآن مجموع السلسلة أعلاه يتجاوز قيمة أي حد من حدودها. إذا أخذنا المثال المقترح ($a_n = e^{-n}$, $b_n = n^2$) نحصل (لأن $(2k)^{2k} < (2k)!$) على :

$$\frac{x^{2k} |f^{(2k)}(0)|}{(2k)!} > \frac{x^{2k} a_n b_n^{2k}}{(2k)!} > \left(\frac{n^2 x}{2k}\right)^{2k} e^{-n}$$

حيث n أي قيمة نرغبها. لتكن x نقطة معطاة ونخذ $n = 2k$ ، فإن:

$$\left(\frac{2^{n^2 x}}{k}\right)^{2k} e^{-n} = \left(\frac{2kx}{e}\right)^{2k}$$

طالما أن $x \neq 0$ فإنه إذا كانت k كبيرة بقدر كافٍ نحصل على $2kx/e > 1$ لذلك حدود سلسلة تيلر لا يمكن أن تؤول إلى الصفر. لذا فهي بالتأكيد متباعدة لكل x عدا الصفر.

من الممكن أن نثبت^(٥٥) أنه إذا كانت $\{M_k\}$ أي متتالية من الأعداد فإنه توجد دالة f قابلة للتفاضل بجميع الرتب بحيث $f^{(k)}(0) = M_k$ لكل k . هذا يبين أن هذا النوع من الدوال التي سلاسلها التيلرية حول الصفر متباعدة (فيما عدا عند الصفر) لابد وأن تكون موجودة بشكل عام.

من الممكن إثبات، عن طريق بناء أكثر تعقيداً، أنه توجد دوال قابلة للتفاضل بجميع الرتب سلاسلها التيلرية متباعدة مهما كان اختيار النقطة لتكون المركز^(٥٦). لنعتبر الدالة المعرفه بـ

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0$$

من الممكن إثبات أن $f^{(k)}(0) = 0$ لكل k لذا جميع حدود سلسلة تيلر لـ f حول الصفر تساوى صفراً، ولذا بالتأكيد تتقارب إلى المجموع الخاطيء. من الواضح أن $f^{(k)}(x)$ لها الصيغة $R(x)e^{-1/x^2}$ لكل $x \neq 0$ حيث R دالة قياسية. الآن $x^{-n}e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ عندما $x \rightarrow 0$ لكل عدد صحيح n (هذا يكافئ الحقيقة المألوفة أنه $x^n e^{-x^2} \rightarrow 0$ عندما $x \rightarrow \infty$) ولذا $f^{(k)}(x) \rightarrow 0$ عندما $x \rightarrow 0$. هذا بواسطة تمرين (٢١-١١) يقتضي أن $f^{(k)}(0) = 0$ أيضاً. نستطيع بصورة مباشرة أن نبين $f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} f^{(k-1)}(x) = 0$.

ليس من الصعب أن نثبت، عن طريق تقدير الباقي بصورة مباشر، أن سلسلة تيلر لدوال مألوفة مثل دالة الجيب والدالة الأسية تكون متقاربة في كل مكان للدوال الأصلية. بطريقة مشابهة، سلسلة تيلر للدالة $(1+x)^p$ حول $x=0$ لأي عدد حقيقي p تتقارب إلى القيمة الصحيحة لكل $|x| < 1$. بما أن سلسلة تيلر هي

نفسها السلسلة التي نحصل عليها من نشر $(1+x)^p$ بنظرية ذات الحدين فإننا بذلك نحصل على إثبات لهذه النظرية لقوى سالبة أو كسرية .

الدالة التي سلسلتها التيلرية حول a تتقارب إليها (أي إلى الدالة) في جوار حول a تسمى تحليلية Analytic عند a . على النقيض من الأمثلة السابقة سنثبت نظرية ملفتة للنظر (تسمى نظرية برنستايين Bernstein) : إذا كانت f وجميع تفاضلاتها غير سالبة في فترة I فإن f تحليلية في هذه الفترة . (على سبيل المثال $f(x) = e^x$. من المناسب أن نكتب الباقي R_n على الصيغة

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!} \int_0^{x-a} f^{(n)}(u+a)(x-u-a)^n du \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n)}((x-a)t+a)(1-t)^n dt \end{aligned}$$

على افتراض أن a و x يقعان في الفترة المعنية I وأن $x > a$. إذا كان $b > x$ و b في I فإننا نحصل على :

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n)}((b-a)t+a)(1-t)^n dt$$

وذلك لأن $f^{(n)}$ دالة غير تناقصية . أي أن

$$R_n(x) \leq \frac{(x-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} \cdot R_n(b)$$

بما أن جميع حدود سلسلة تيلر غير سالبة فإننا نحصل أيضا على $f(b) \geq R_n(b)$. بالرجوع إلى المتراجحتين الأخيرتين نجد أن :

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{n+1} f(b)$$

ولأن $x-a < b-a$ فإن هذه المتراجحة تجعل $R_n(x) \rightarrow 0$.

في الحقيقة من الممكن أن نستبدل فرضية أن جميع التفاضلات موجبة بغرض أن جميع الفروق:

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f(x + kh)$$

لأنه بالإمكان أن الدالة التي جميع فروقها موجبة تكون بصورة آلية قابلة للتفاضل بجميع الرتب^(٥٧). (قد تكلمنا عن الخطوة الأولى في هذا الصدد في 23 ؛ عندما بينا أن للدالة، التي فروقها من الرتبة الثانية موجبة، تفاضل من الجهة اليمنى وآخر من الجهة اليسرى).

بالرغم من أنه من الممكن أن تكون سلسلة تيلر، للدالة غير التحليلية، متباعدة حول كل نقطة من فترة إلا أن الظاهرة التي تحدثنا عنها آنفاً وهي تقارب سلسلة تيلر إلى المجموع الخاطيء لا يمكن أن تحدث على جميع الفترة. في الحقيقة بإمكاننا أن نثبت أنه إذا كان نصف قطر تقارب سلسلة تيلر، لدالة حول كل نقطة من فترة، موجباً فإنه لابد وأن توجد فترة جزئية حيث تكون الدالة تحليلية هناك. تكرار تطبيق هذه الحقيقة يقود إلى استنتاج أن (تحت نفس الفرضيات السابقة) مجموعة النقاط التي يخفق نشر تيلر حولها تكون مغلخلة على الأكثر.

الإثبات يعتمد على تطبيق بسيط لنظرية بير Baire. لتكون $p(a)$ ترمز إلى نصف قطر التقارب لسلسلة تيلر للدالة f حول النقطة a . إذن بتطبيق الصيغة المعتادة نحصل على

$$1/p(a) = \limsup_{n \rightarrow \infty} |f^{(n)}(a)/n!|^{1/n}$$

بما أن $1/p(a)$ محدود لكل a في الفترة المعنية، فإنه لكل a الكمية $\mu(a) = \sup_n |f^{(n)}(a)/n!|^{1/n}$ محدودة. اتحاد المجموعات E_k من النقاط a حيث $u(a) < k$ ($k = 1, 2, \dots$) يطابق الفترة المذكورة وبالتالي فإن نظرية بير ترشدنا إلى أنه لا يمكن أن تكون، جميعها مغلخلة. لذا توجد فترة جزئية حيث $|f^{(n)}(a)/n!|^{1/n} \leq k$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) متحقق أولاً في مجموعة كثيفة ومن ثم في كل الفترة

نتيجة لاستمرارية $f^{(n)}$. في هذه الفترة تكون f تحليلية لأن المتراجحة الأخيرة تبين أن الباقي في سلسلة تيلر حول a يؤول إلى الصفر لكل النقاط x حيث $|x - a| < k$. الآن من الطبيعي أن يثار الاستفسار عما يحدث عندما يكون $p(a)$ ليس فقط موجباً بل بعيداً عن الصفر: أي أنه $p(a) \geq \delta > 0$ لكل a في فترة ما. في هذه الحالة من الممكن إثبات أن هذا الشرط يجعل f تحليلية على جميع الفترة^(٥٨).

حواش

(١) لقد حسبت π إلى أكثر من 10^5 خانة عشرية : راجع

D. Shanks and J.W. Wrench Jr., Calculation of π to 100,000 decimals, *Math. of Computation* **16** (1962), 76-99.

وكذلك فقد حسب J. Gilloud وآخرون معه π إلى نصف مليون من الخانات العشرية ولكن نتائجهم لم تطبع بعد .

(١ أ) يوجد براهين أخرى في المراجع التالية :

M. Reichbach, Une simple demonstration du theoreme de Cantor-Bernstein, *Colloquium Math.* **3** (1955), 163;

M.S. Hellmann, A short proof of an equivalent form of the Schroeder-Bernstein theorem, *Amer. Math. Monthly* **68** (1961), 770;

M.F. Smiley, Algebra of Matrices, Allyn and Bacon, Boston, 1965, pp. 235-236;

R.H. Cox, A proof of the Schroeder-Bernstein Theorem, *Amer. Math. Monthly* **75** (1968), 508.

(٢) راجع مثلاً

C. Kuratowski, *Topologie*, Vol 2, *Monografie Matematyczne*, Vol. 21, 2nd ed., Warsaw, 1952, p. 85.

(٣) البرهان مقترح من W.C. Fox و R.R. Goldberg .

(٤) راجع مثلاً

M.E. Munroe, *Introduction to measure and integration*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953, p. 30.

(٥) جميع الطرق لإعطاء مجموع لسلسلة لانتهائية غير طريقة التقارب تسمى طرق أو أساليب قابلية الجمع (Summability). راجع الكتب التالية:

O. Szasz, *Introduction to the theory of divergent series*, Hafner, New York, 1948;
G.H. Hardy, *Divergent series*, Oxford, 1949;
K. Zeller, *Theorie der limitierungsverfahren*, *Ergebnisse der Mathematik*, new series, no. 15, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

(٦) راجع مثلاً:

H. Hahn, *Reelle Funktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932, p. 115.

E. Corominas and F. Sunyer Balaguer, Condiciones para que una funcion (V) infinitamente derivable sea un polinomio, *Revista Mat. Hisp., Amer.* (4) **14** (1954), 26-43.

يوجد في هذا البحث العديد من التعميمات للنظرية.

(٨) على سبيل المثال، راجع:

A. Denjoy, Sur les fonctions derivees sommables, *Bull. Soc. Math. France* **43** (1915), 161-248.

S. Banach, Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktion enmengen, (٩) *Studia Math.* **3** (1931), 174-180)

(١٠) لقد أنشئ أبسط مثال في البحث التالي:

A.P. Morse, A continuous function with no unilateral derivatives, *Trans. Amer. Math. Soc.* **44** (1938), 496-507.

S. Saks, On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, (١١) *Fund. Math.* **19** (1932), 211-219.

(١١ أ) راجع كذلك:

G.J. Minty, On the notion of "function", *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 188-189.

(١٢) راجع خاصة الكتابين التاليين:

J.B. Rosser, *Logic for Mathematicians*, McGraw-Hill, New York, 1953, pp. 366 ff.
K.K. Menger, *Calculus, a modern approach*, Ginn, Boston, 1955.

G.H. Hardy, A formula for the prime-factors of any number, *Messenger of Math.* **35** (1906), 145-146. (١٣)

W. Sierpinski, Sur un exemple effectif d'une fonction non representable analytiquement, *Fund. Math.* **5** (1924), 87-91. (١٤)

H. Lebesgue, *Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives*, (١٥) 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris, 1928, p. 97.

H. Fast, Une remarque sur la propriete de Weierstrass, *Coloq. Math.* **7** (١٥ أ) (1959), 75-77.

(١٥ ب) الجملة الأخيرة نتيجة لتعريفنا للاتصال لأن الخاصية هذه تتطلب أن تكون الصورة العكسية لكل فترة مفتوحة، مفتوحة (وهذا يعني أن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة تكون مفتوحة) لمعالجة أعمق راجع:

J.B. Diaz, Discussion and extension of a theorem of Tricomi concerning functions which assume all intermediate values, *J. Math. Mech.* **18** (1968/69), 617-628.
وكذلك مراجعة هذا البحث في *Math. Reviews* **39** # 370.

(١٥ ج) لا يوجد تحويل متصل على فترة بحيث يوجد معكوسان فقط لكل صورة.
راجع:

O.G. Harrold, the non-existence of a certain type of continuous transformation, *Duke Math. J.* **5** (1939), 789-793.

ومن أجل التعميمات راجع:

J.H. Roberts, Two-to-one Transformations, *Duke Math. J.* **6** (1940), 256-262.
P. Civin, Two-to-one mappings of manifolds, *Duke Math. J.* **10** (1943), 49-57.

D.C. Gillespie, A property of continuity, *Bull. Amer. Math. Soc.* **28** (١٥ د) (1922), 245-250.

(١٥ هـ) في البحث السابق نجد قانونا لهذه الدوال وهو كالتالي:

$$f(x) = \pi x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$0 < x \leq 1$$

حيث

(١٥ و) يوجد برهان آخر في البحث التالي:

J.B. Diaz and F.T. Metcalf, A continuous periodic function has every chord twice, *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 833-835.

من أجل التعميمات إلى الدوال الدورية تقريبا (almost periodic) ودوال أخرى
راجع:

J.C. Oxtoby, Horizontal chord theorems, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 468-475.

(١٦) تعزى هذه النظرية إلى P. Levy.

P. Levy, Sur une generalisation du theoreme de Rolle, *C.R. Acad. Sci. Paris* **198** (1934), 424-425.

ولكن أعيد اكتشافها من قبل آخرين. يوجد تعميمات في:

H. Hopf, Über die Sehnen ebener Kontinen und die Schließen geschlossener Wege, *Comment. Math. Helv.* **9** (1937), 303-319.

يوجد في بحث Hopf مناقشة لأطوال الأوتار الأفقية لدالة معطاة وكذلك في بحث Oxtoby المذكور في (١٥) والبحث:

R.J. Levit, The finite difference extension of Rolle's theorem, *Amer. Math. Monthly* **70** (1963), 26-30.

للمزيد من المعلومات والتطبيقات راجع:

J.T. Rosenbaum, Some consequences of the universal chord theorem, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 509-513.

كذلك يعطى Rosenbaum تفسيراً حياً للنظرية:

How to build a picnic table for use on a mountain range of known period, *Notices Amer. Math. Soc.* **16** (1969), 94.

وهذا تطبيق آخر يعزي إلى Oxtoby: إذا كانت f متصلة و $f(x+y) = g(f(x), y)$ لجميع قيم x و y فإن f إما دالة مطردة فعلية أو دالة ثابتة (هذه هي مسألة E2246 الواردة في *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 676-677). إذا لم تكن f مطردة فعلية فإن $f(x_0 + h) = f(x_0)$ لقيمة معينة x_0 وعدد موجب h . في هذه الحالة نجد أن

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f((x_0+h) + (x-x_0)) = g(f(x_0+h), x-x_0) \\ &= g(f(x_0), x-x_0) = f(x_0 + (x-x_0)) = f(x). \end{aligned}$$

وبما أنه يوجد للدالة f وتر أفقي قصير اختياري (نظرية الوتر العامة) فإن للدالة f دورات قصيرة اختيارية ولذا فهي دالة ثابتة. كذلك يلاحظ Oxtoby أنه إذا كانت f متصلة وإما مطردة فعلية أو ثابتة فإنه يوجد دالة g بحيث $f(x+y) = g(f(x), y)$.

(١٧) راجع Hopf في الملاحظة (١٦):

(١٨) من أجل المزيد من الإيضاح حول هذه النظرية ونظريات أخرى راجع

A.W. Tucker, Some topological properties of disk and sphere, *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress 1945*, University of Toronto Press, 1946, pp. 285-309.

J.G. Brennan, Aproposity of a plane convex region, *Math. Gaz.* **42** (1958), (١٩) 301-302;

A.C. Zitronenbaum, Bisecting an area and its boundary, *Math. Gaz.* **43** (1959), 130-131.

(٢٠) من أجل البرهان والمراجع والتعميمات راجع .

A.H. Stone and J.W. Tuokey, Genralized "sandwich" theorems, *Duke Math. J.* **9** (1942), 356-359.

(٢١) للمزيد حول هذه النظرية والتي تليها راجع :

G. Polya and G. Szegi, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, Berlin, 1925, Vol. 1, pp. 63, 225; Problems II 126, 127.

(٢٢) يوجد مناقشة لمفهوم المنحنى المتصل في :

G.T. Whyburn, What is a curve?, *Amer. Math. Monthly* **49** (1942), 493-497.

J.W.T. Youngs, Curves and surfaces, *ibid.* **51** (1944), 1-11.

W. Hurewicz, Über Dimensionserhöhender Stetige Abbildungen, *J. Reine Angew. Math.* **169** (1933), 71-78. (٢٣)

I.J. Schoenberg, On the peano curve of Lebesgue, *Bull. Amer. Math. Soc.* **44** (٢٤) (1938), 519.

(٢٥) للتعميمات راجع :

L. Lorch, Derivatives of infinite order, *Pacific J. Math.* **3** (1953), 773-778.

(٢٦) راجع كتاب Polya-Szeőo المذكور في ملاحظة (٢١)

Vol. 1, pp. 30, 185, problem I 165:

(٢٧) انظر على سبيل المثال :

C. de la Vallée Poussin, *Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, 2nd ed., Gauthier-Villars, Paris, 1934, pp. 127 ff.

(٢٧ أ) لبرهان بسيط أنظر

F.W. Carroll, Separately continuous functions are Baire functions, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 175.

(٢٨) النظرية التي تقول بإمكانية التقريب المنتظم لدالة متصلة بواسطة كثيرة حدود تسمى نظرية فيرشتراس (Weierstrass approximation theorem) البرهان المعطى هنا يرجع إلى E. Landau .

(٢٩) المطلوب هنا وجود قاعدة هامل (Hamel Basis) للأعداد الحقيقية راجع :

H. Hahn and A. Rosenthal, *Set functions*, University of New Mexico Press, Albuquerque, 1948, pp. 100 ff.

يوجد دالة خطية غير متصلة في :

G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G., Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934, p. 96.

بحث هامل الاصيلي مشار اليه في الملاحظه (٣٢) . راجع كذلك :

G.S. Young, The linear functional equation, *Amer. Math. Monthly* **65** (1958), 37-38.

يوجد مراجع وملاحظات تاريخية في :

J.W. Green and W. Gustin, Quasi-convex sets, *Canadian J. Math.* **2** (1950), 489-507.

(٣٠) يمكن الرجوع لهد البرهان وبعض التعميمات في :

H. Kestelman, On the functional equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$, *Fund. Math.* **34** (1947), 144-147.

A. Zygmund, *Trigonometrical series, Monografie Matematyczne*, Vol. 5, (٣١) Warsaw Lwow, 1935, pp. 133-134; *Trigonometric series*, Vol. I, Cambridge University Press, 1959, p. 235.

لقد اكتشفت الخاصية من قبل H. Steinhaus . للمزيد من خصائص مجموعة كانتور ومجموعات مشابهة راجع :

T. Šalat, (*Math. Reviews* 24 # A2538); N.C. Bose Majumder (*Math. Reviews* 22 # 2971; 24 # A1706, A2537, A3444; 29 # 5215, 5732, 5733); *Amer. Math Monthly* 72 (1965), 725-729 (*Math. Reviews* 32 # 1295).

G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$, *Math. Ann.* 60 (1905), 459-462. (٣٢)

M. Plancherel and G. Pólya, Sur les valeurs moyennes des fonctions reelles définies pour toutes les valeurs de la variable, comment. *Math. Helv.* 3 (1931), 114-121. (٣٣)

(٣٣ أ) راجع :

R.P. Agnew, Limits of integrals, *Duke Math. J.* 9 (1942), 10-19; Mean values and Frullani integral, *Proc. Amer. Math. Soc.* 2(1951), 237-241; Frullani integrals and variants of the Egoroff theorem on essentially uniform convergence, *Acad. Serbe. Sci. Puble. Inst. Math.* 6 (1954), 12-16.

(٣٣ ب) من أجل عرض كامل للنظريات حول المشتقات راجع :

A.M. Bruckner and J.L. Leonard, Derivatives, *Amer. Math. Monthly* 73, no. 4 (Slaught Papers, no. 11), 24-56.

M.Mikolas, Construction des familles de fonctions partout continues non derivables, *Acta Sci, Math. Szeged* 17 (1956), 49-62. (٣٤)

من أجل إنشاءات أبسط راجع :

J. McCarthy, An every where continuous nowhere differentiable function, *Amer. Math. Monthly* 60 (1953), 709;

T.H. Hildebrandt, A simple continuous function with a finite derivative at no point, *Amer. Math. Monthly* 40 (1933), 547-548.

W. Sierpiński: see S. Saks, *Théorie de L'intégrale*, *Monografie Matematyczne*, Vol. 2, Warsaw, 1933, pp. 167-168. (٣٥)

(٣٦) كتاب Saks المذكور في الملاحظة السابقة p. 177 . راجع كذلك :

D.E. Varberg, On absolutely continuous functions, *Amer. Math. Monthly* **72** (1965), 831-841; E.P. Woodruff, Derivatives of a function whose image is of Lebesgue measure zero, *Notices Amer. Math. Soc.* **16** (1969), 666-667.

من أجل برهان أبسط لنتيجة أسهل راجع كتاب Pólya و Szegő المذكور في ملاحظة (٢١)

Vol. 1, pp. 63, 225; problem II 125.

E.W. Hobson, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, Vol. 1, 3rd. ed. Cambridge University Press, 1927, p. 363. (٣٧)

T.M. Flett, A mean value theorem, *Math. Gaz.* **42** (1958), 38-39. (٣٨)

راجع كذلك :

S.G. Wayment, An integral mean value theorem, *Mat. Gaz.* **54** (1970), 300-301.

والمراجع المعطاة هناك :

J.B. Diaz and R. Výborný, On some mean value theorems of the differential calculus, *Bull. Austral. Math. Soc.* **5** (1971), 227-238.

S. Reich, Problem 5810, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 798.

(٣٩) يوجد معالجة لحالة خاصة في :

L.J. Paige, A note on indeterminate forms, *Amer. Math. Monthly* **61** (1954), 189-190.

(٣٩ أ) راجع : A.P. Morse, Dini derivatives of continuous functions, *Proc. Amer. Soc.* **5** (1954), 126-130.

(٤٠) من أجل المراجع حول الموضوع راجع

P. Erdős, Some remarks on set theory, *Ann. of Math.* **44** (1943), 643-646 (p. 646).

A.N. Singh, On infinite derivatives, *Fund. Math.* **33** (1945), 106-107. (٤١)

M.K. Fort, Tr., A theorem concerning functions discontinuous on a dense set, *Amer. Math. Monthly* **58** (1951), 408-410. (٤٢)

البرهان المبسط في الكتاب مقترح من قبل A.C. Segal .
يوجد برهان بسيط آخر في :

E.M. Beesley, A.P. Morse and D.C. Pfaff, Lipschitzian points, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 603-608.

(٤٣) من أجل عرض مبسط راجع

F. Riesz and B. Sz-Nagy, *Functional Analysis*, Ungar, New York, 1955, pp. 17 ff.

J.S. Lipiński, Sur la dérivée d'une fonction de sauts, *Colloq. Math.* **4** (1957), 197-205. (٤٤)

L.A. Rubel, Differentiability of monotonic functions, *Colloq. Math.* **10** (1963), 277-279.

(٤٥) من أجل إنشاء مبسط راجع :

R. Salem, On some singular monotonic functions which are strictly increasing, *Trans. Amer. Math. Soc.* **53** (1943), 427-439.

(٤٦) الإنشاء المعطى في الكتاب مأخوذ من :

S. Saks, (*Theory of the integral*, *Monografic Matematyczne*, Vol. 7, Warsaw-Lwów, (1937), pp. 205-206).

نذكر هنا بعض الحقائق ذات العلاقة :

إذا كانت g متصلة ولها مشتقة (نهائية أو لا نهائية) في كل مكان ماعدا على مجموعة قابلة للعد وهذه المشتقة غير سالبة في كل مكان تقريباً فإن g تكون غير تناقصية (راجع Saks المذكور سابقاً).

إذا كانت E مجموعة G_δ قابلة للعد فإنه يوجد دالة (ليست متصلة بالضرورة) مشتقتها تساوي $+\infty$ على E و 0 خارج E راجع :

G. Piranian, The derivative of a monotonic discontinuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 243-244.

(المجموعة تكون G_δ إذا أمكن تمثيلها كتقاطع مجموعة قابلة للعد من المجموعات المفتوحة. المجموعة المكونة من نقاط الأطراف للفترات المكاملة لمجموعة كانتور هي G_δ بينما مجموعة الأعداد النسبية في R_1 ليست G_δ).

(٤٧) العرض يشبه عرض كتاب Riesz و Sz-Nagy المذكور آنفاً مع بعض التبسيط المعطى في الكتاب

H. Kestelman, *Modern theories of integration*, Oxford, (1937), pp. 199 ff.

لقد برهن Lebesgue هذه النظرية كنتيجة لنظريته في التكامل. يوجد برهان قصير في :

D.G. Austin, A geometric Proof of the Lebesgue differentiation theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 220-221.

(٤٨) هذا البرهان وبرهان النظرية التالية مثل براهين Riesz و Sz-Nagy. نظرية Fubini في التكامل نظرية أخرى.

P. Erdos, Some remarks on the measurability of certain sets, *Bull, Amer. Math. Soc.* **51** (1945), 728-731. (٤٩)

(٥٠) أعم نتيجة موجودة في :

A. Ostrowski, Zur Theorie der konvexen Funktionen, *Comment. Math. Helv.* **1** (1929), 157-159.

(٥١) العرض يتبع العرض الموجود في :

R.P. Boas and D.V. Widder, Functions with Positive differences, *Duke Math. J.* 7 (1949), 496-503.

(٥٢) من أجل المتراجحات هناراجع :

Hardy, Littlewood and Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, (1934), chapters 2 and 3.

E.F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

(٥٣) للمراجع والتعميات راجع :

Boas, Asymptotic relations for derivatives, *Duke Math. J.* 3 (1937), 637-646.

(٥٤) من أجل البحوث المتعلقة بالموضوع راجع :

H. Salzmann and K. Zeller, Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen, *Math. Z.* 62 (1955), 354-367.

(٥٥) راجع :

A. Rosenthal, On functions with infinitely many derivatives, *Proc. Amer. Math. Soc.* 4 (1953), 600-602.

Salzmann and Zeller, Paper cited above. H. Mirkil, Differentiable functions, formal power series and moments, *Proc. Amer. Math. Soc.* 7 (1956), 650-652.

(٥٦) لبرهان نظرية بير راجع :

D. Morgenstern, Unendlich oft differenzierbare nicht-analytische Funktionen, *Math. Nachr.* 12 (1954), 74.

للحصول على إنشاء صريح راجع :

H. Cartan, Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives, *Actualités Scientifiques et industrielles*, no. 867 (1949), pp. 20-22.

(٥٧) S. Bernstein راجع بحث Boas و Widder المذكور سابقا.

(٥٨) راجع بحث Salzmann و Zeller المذكور سابقا.

(٥٩) W.F. Osgood, Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung, *Monatsh.*

Math. Phys. **9** (1898), 331-345, p. 344.

حلول التمارين

(١-١) مجرد إعادة صياغة التعريف .

(٢-١) (أ) كل حرف إما أن يكون حرفاً ساكناً أو حرف علة وجميع حروف العلة تظهر في الجملة "Real functions" .

(ب) $C(E)$ مكونه من جميع حروف العلة .

(ج) $C(F)$ مكونة من الحروف الساكنة فقط (وليس جميع هذه الحروف) .

(د) $F \cap E = \{r, l, f, n, c, t, s\}$ لا يحوى أياً من حروف العلة .

(١-٢) (أ) كل الأعداد التي أكبر أو تساوى 1 ، جميع الأعداد غير الموجبة ، 0 ، 1 .

(ب) ، (ج) ، (د) ، (هـ) : نفس إجابة الفقرة (أ) .

(و) جميع الأعداد غير السالبة ، جميع الأعداد غير الموجبة ، 0 ، 0 .

(٢-٢) يوجد أكبر حد أدنى لكل مجموعة E غير خالية ومحدودة من أسفل ونرمز له بالرمز $\inf E$ وهو يحقق الخصائص التالية . إذا كانت $x \in E$ فإن $x \geq \inf E$ وإذا كانت $A > \inf E$ فإنه يوجد $x \in E$ واحدة على الأقل

بحيث $x < A$. إذا افترضنا خاصية أصغر حد أعلى وكانت E مجموعة محدودة من أسفل، إجعل F مجموعة الأعداد x بحيث $-x \in E$. وبما أن $x > M$ يعني $-x < -M$ والمجموعة F محدودة من أعلى ولها أصغر حد أعلى B . إذاً $-B$ هو أكبر حد أدنى للمجموعة E . لأنه إذا كانت $x \in E$ ، $-x \leq B$ فإن $x \geq -B$ ، وإذا كانت $-A < B$ ، $A > -B$ فإنه يوجد $x \in E$ بحيث $-x > -A$ أي أن $x < A$.

(٣-٢) $+\infty + (-\infty)$ يعني $\left(\frac{a}{0}\right) + \left(\frac{b}{0}\right)$ حيث $b < 0$ ، $a > 0$. ولكي نبقى على عمليات الحساب في هذه الحالة نجد أن المجموع يساوي $\frac{a+b}{0}$ وهذا قد يكون $+\infty$ أو $-\infty$ أو حتى غير معرف حسب ما إذا كانت $a + b > 0$ أو $a + b < 0$ أو $a + b = 0$. إذا كانت $(+\infty) = 0$ فإن $+\infty = \frac{x}{0}$ حيث x أي عدد موجب . كذلك يستحيل إعطاء معنى للكمية $\frac{(+\infty)}{(+\infty)}$.

(٤-٢) إذا كانت $x \in E$ فإن كل حد أعلى للمجموعة E لا يقل عن x وكل حد سفلي للمجموعة E لا يزيد عن x . نفس الشيء يصح إذا بدلنا x بالرمز y حيث $y \in E$. إذا $y > x$ فإن $y > x \geq \inf E$. $\sup E \geq y > x$. ونفس الشيء يحدث إذا $y < x$.

(١-٣) خذ المجموعات E و F وأحذف من F كل عنصر مشترك مع E . إذا كانت المجموعة المتبقية (اسمها F_1) نهائية، عد F_1 ثم E . إذا لم تكن F_1 نهائية، استعمل الأعداد الصحيحة الفردية لترقيم F_1 والأعداد الصحيحة الزوجية لترقيم E .

(٢-٣) يمكن تسمية عناصر المجموعة E_k ، $e_{k,1}$ ، $e_{k,2}$ ، $e_{k,n}$ أربط $e_{k,n}$ بالزوج (k, n) .

(٣-٣) الدالة الخطية $ax + b$ بعوامل صحيحة تعطي تناظراً أحادياً مع الأزواج (a, b) وكثيرة الحدود $ax^2 + bx + c$ تعطي تناظراً مع الأزواج (a, b, c) وهكذا.

(٤-٣) لو كانت الأعداد الحقيقية x في (a, b) قابلة للعد فإن الأعداد الحقيقية $x - a$ في $(0, b - a)$ تكون قابلة للعد كذلك الأعداد الحقيقية $\frac{x - a}{b - a}$ في $(0, 1)$ تكون قابلة للعد.

(٥-٣) لإنشاء المستخدم في الكتاب ينطبق بكامله لأنه العدد المنشأ لا يحوى الرقم 3.

(٦-٣) إذا كانت E نهائية بعد حذف x_1 فإنها ستبقى نهائية بعد إضافة x_1 . إذا انتهت العملية بعد حذف x_1, x_2, \dots, x_k فسوف يبقى لدينا مجموعة نهائية وهذه المجموعة ستبقى نهائية بعد إضافة k من النقاط.

(٧-٣) اجعل F المجموعة E بعد حذف x_0 . اختر مجموعة لانهائية قابلة للعد $\{x_1, x_2, \dots\}$ من F ، أربط نقاط E المختلفة عن x_0, x_1, \dots مع نفسها (كنقاط من F)، وأربط x_0 بالنقطة x_1 والنقطة x_1 بالنقطة $x_2 \dots$ الخ.

(٨-٣) التناظر $\tan x \longleftrightarrow x$ يعطي تناظراً أحادياً بين الأعداد الحقيقية المحصور بين $-\pi/2$ و $\pi/2$ ومجموعة الأعداد الحقيقية بكاملها. بالإمكان إعطاء براهين هندسية.

(٩-٣) إذا كانت «مجموعة كل المجموعات» مجموعة ونسميها S فإن فئة المجموعات الجزئية في S تمثل مجموعة T لا يمكن وضعها في تناظر أحادي مع أي مجموعة جزئية في S . ولكن المجموعات الجزئية في S هي

مجموعات مثل عناصر S ولذا فإن الطائفة T في تناظر أحادي مع مجموعة جزئية من S وهي T نفسها. هذا تناقص.

(٣-١٠) استخدم نظرية شرودر - برنشتاين. فمن ناحية نستطيع أن نربط كل عدد حقيقي بمتتالية من الأعداد الحقيقية وهي متتالية أرقام مفكوكه العشري. ومن ناحية أخرى، إذا كان لدينا متتالية من الأعداد الحقيقية فإننا نستطيع كتابة مفكوكاتها العشرية، واحداً تلو الآخر ومن ثم نأخذ الأرقام التي على قطر الصفوف الناتجة لنحصل على مفكوك عدد حقيقي. المتتاليات المختلفة تعطي أعداداً مختلفة وذلك لأن المفكوك العشري لا ينتهي.

(٤-١) الخصائص (١) و (٢) للمسافتين الجديدتين واضحة. لإثبات الخاصية (٣)، سم النقاط x, y, z كالاتي $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ على الترتيب، علينا أن نثبت الآتي:

$$|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$$

وأن

$$\max(|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|) \leq \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) + \max(|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|).$$

المتراجحة الأولى تأتي من $|x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$ (وكذلك إذا بدلنا x بـ y). المتراجحة الثانية تنتج من نفس المتراجحات السابقة لأن

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} |x_1 - x_3| \\ |y_1 - y_3| \end{array} \right\} &\leq \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \\ |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| \end{array} \right\} \\ &\leq \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) \\ &\quad + \max(|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|). \end{aligned}$$

أطوال أضلاع المثلث الذى رؤوسه $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ هي 1 ، 1 ، 2 ، حسب المسافة الأولى الجديدة. أما المثلث الذى رؤوسه $(0, 0)$ ، $(1, -1)$ ، $(1, 1)$ فأطوال الأضلاع هي 1 ، 1 ، 2 حسب المسافة الثانية الجديدة. المحل الهندسي للعلاقة $d(x, 0) = 1$ في المسافة الأولى الجديدة يتألف من النقاط (x, y) حيث $|x| + |y| = 1$ أي المربع الذى رؤوسه $(\pm 1, 0)$ ، $(0, \pm 1)$. أما في المسافة الثانية فالمحل الهندسي يساوى النقاط (x, y) حيث $|x| = 1$ و $|y| \leq 1$ أو $|x| \leq 1$ و $|y| = 1$ وهذا مربع رؤوسه عند النقاط $(\pm 1, \pm 1)$.

(٢-٤) جميع شروط الفضاء المترى تبقى محققة.

(٣-٤) $d(x, x) = 0$ و $d(y, x) = d(x, y) = 1 > 0$ عندما $x \neq y$. إذا كانت $x = z$ فإن $0 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ وإذا كانت $x \neq z$ فإن $1 = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ لأن $x = y = z$ ممنوع .

(١-٥) جوار عنصر x في الفضاء C يتألف من جميع الدوال المتصلة y بحيث $|y(t) - x(t)| < r$ لجميع t في $[0, 1]$.

(٢-٥) إذا كانت $p = (m, n)$ نقطة من الفضاء فإن جوار p يتألف من جميع النقاط باحداثيين صحيحين التي بعدها العادي عن p أقل من r . كل جوار يحوى عدداً نهائياً من النقاط وإذا كانت $r < 1$ فإنه يحوى مركزه فقط .

(٣-٥) الجوارات التي قطرها أقل من 1 تحوى مراكزها فقط (تمرين ٢-٥) إذا الجوارات الكافية الصّغر لأى نقطة من E لا تحوى نقاطاً في $C(E)$ ولذا فحدود E خالية .

(٤-٥) التعريف متناظر في E و $C(E)$.

(٥-٥) لتكن x نقطة حدية لـ B ولتكن N جواراً حول x . إذن N تحوى نقطة y من B على الأقل وكذلك N تحوى جواراً حول y وهذا الجوار يحوى نقطة من E ونقطة من $C(E)$. إذن x نقطة حدية لـ E أي أن $x \in B$.
إذا كانت E مكونة من جميع النقاط النسبية في R_1 فإن حدود E هي المجموعة R_1 وعليه فإن حدود حدود E مجموعة خالية.

(٦-٥) (أ): حدود N مكون من النقاط التي تبعد المسافة r عن x .
(ب): حدود N قد تكون خالية (تمرين ٥-٣) ولكن إذا احتوت نقاطاً فلا بد أن تكون هذه النقاط على مسافة r من x . حيث إنه إذا كان بعد النقطة $y (y \in N)$ عن x أقل من r فسنجد جواراً صغيراً لـ y بهذه الخاصية وعليه فإن y نقطة داخلية. بطريقة مماثلة، النقطة y والتي مسافتها عن x أكبر من r تكون نقطة داخلية من $C(E)$.

(٧-٥) إذا كانت $a < x < b$ ، وجوار x فترة مثل $(x - h, x + h)$ وإذا كانت $h < \min(x - a, b - x)$ فالجوار داخل (a, b) . إذاً x نقطة داخلية.
النقاط الحدية للفترة $[a, b]$ هي a و b وبما أنها تنتمي إلى $[a, b]$ إذن $[a, b]$ مغلقة.

(٨-٥) الفترة (a, b) غير مفتوحة وغير مغلقة في R_2 لأن داخلها مجموعة خالية ولكنها لا تحوى نقاطها الحدية a و b . كذلك $[a, b]$ مغلقة في R_2 لأن جميع نقاطها نقاط حدية.

(٩-٥) النقطة ٠ ليست نقطة داخلية، ١ نقطة حدية لا تنتمي إلى المجموعة.

(١٠-٥) جميع نقاط الفضاء داخلية وعليه فالفضاء مفتوح. حدود الفضاء مجموعة خالية ولذا فهي محتواة في الفضاء. إذاً الفضاء بكامله مفتوح ومغلق. المجموعة الخالية تحوي داخلها (الخالي) وحدودها (الخالية).

(١١-٥) الفترات $(n, n + 1/2)$ تمثل المجموعات المطلوبة وكذلك اتحادات هذه المجموعات.

(١٢-٥) غير مفتوحة وغير مغلقة حيث إن الحدود هي R_1 بكاملها وداخلها مجموعة خالية.

(١٣-٥) أي جوار يكون مفتوحاً. الجوار المكون من نقاط الفضاء والتي تبعد عن 0 بمسافة أقل من $\sqrt{2}$ هو جوار مغلق لأن مجموعة حدوده خالية.

(١٤-٥) إذا كانت E أي مجموعة في هذا الفضاء فإن جوارات نقاط E والتي أنصاف أقطارها أقل من 1 تنتمي جميعها لـ E وعليه فإن E مفتوحة. من التمرين (٣-٥) نجد أن حدود E خالية وعليه فهي محتواة في E أي أن E مغلقة.

(١٥-٥) إذا $x \in G \Rightarrow E$ حيث G مفتوحة و x نقطة داخلية من G ولذا فهي نقطة داخلية من E لأن كل جوار حول x مكون من نقاط G فقط يكون داخل المجموعة E .

(١٦-٥) إذا كانت E مفتوحة و $x \in E$ فإنه يوجد جوار حول x مكون من نقاط E فقط ولذا فليست جميع جوارات x تحوي نقاطاً من E ونقاطاً من $C(E)$. إذن E لا تحوي أيّاً من نقاطها الحدية. وبالعكس إذا لم تحوي E أيّاً من نقاطها الحدية وكانت $x \in E$ فإن

x ليست نقطة حدية ولذا يوجد جوار للنقطة x لا يتقاطع مع $C(E)$. إذن E مجموعة مفتوحة.

(١٧-٥) المجموعة E مفتوحة إذا وإذا فقط لم تحو أيّاً من نقاطها الحدية أي إذا كانت جميع نقاط الحدود في $C(E)$. هذا بدوره يعني أن E مفتوحة إذا وإذا فقط كانت $C(E)$ تحوي جميع نقاط حدودها $C(E)$ (لأن حدود E هي حدود $C(E)$) أي إذا كانت $C(E)$ مغلقة.

(١٨-٥) هذا صياغة أخرى للتمرين (١٧-٥) بدل E و $C(E)$.

(١٩-٥) افرض أن E تحوي جميع نقاط حدودها وأن x نقطة نهاية لـ E . في هذه الحالة إما $x \in E$ أو $x \in C(E)$. في الحالة الثانية نجد أن كل جوار حول x يتقاطع مع E (لأن x نقطة نهاية لـ E) ويتقاطع مع $C(E)$ أيضاً (لأن x في $C(E)$). إذن x نقطة حدية لـ E إذا لم تكون في E . إذن E تحوي جميع نقاط نهاياتها إذا كانت تحوي جميع نقاطها الحدية. وبالعكس، لنفرض أن E تحوي جميع نقاط نهاياتها ولتكن y نقطة حدية لـ E . إذا كانت y نقطة نهاية لـ E فإنها في E بالفرضية. إذا لم تكن نقطة نهاية لـ E فإنه يوجد جوار حول y لا يحوي أي نقاط من E ماعدا y نفسها، ولكن $y \in E$. إذاً E تحوي جميع نقاطها الحدية.

(٢٠-٥) لتكن x نقطة نهاية لـ E ولتكن N_1 جواراً حول x . من الفرض، N_1 تحوي نقطة y_1 من E بحيث $y_1 \neq x$. أي جوار N_2 حول x بنصف قطر أقل من $d(x, y_1)$ لا يحوي النقطة y_1 ولكنه يحوي نقطة أخرى y_2 من E ، وهكذا.

(٢١-٥) افرض أن F مجموعة نقاط نهايات E ولتكن x نقطة نهاية لـ F . إذن كل جوار حول x يحوى نقاطاً من F أي أنه يحوى نقاطاً نهايات لـ E وعلية فهو يحوى جوارات جزئية تحتوى على نقاط من E . إذن x نقطة نهاية للمجموعة E وهذا يعني أن $x \in F$. أي أن F تحتوى جميع نقاط نهاياتها.

(٢٢-٥) (أ) و (ج): جميع نقاط الفترة $[0, 1]$ ، (ب): النقطة 0 .

(٢٣-٥) اجعل x نقطة نهاية لـ E . كل جوار حول x يحوى عدداً لا نهائياً من نقاط E (تمرين ٥-٢٠)، وحيث أن كل نقطة من هذه النقاط تنتمي إلى A أو إلى B فلا بد أن تحوى A أو B عدد لا نهائياً من هذه النقاط.

(٢٤-٥) إذا كانت مجموعة حدود E خالية فإنها أي E تكون مفتوحة ومغلقة في نفس الوقت (تمرين ٥-١٦، تعريف المجموعة المغلقة).

(٢٥-٥) علينا أن نبرهن في البداية أنه إذا كانت x تنتمي إلى إغلاق E ولا تنتمي إلى E نفسها فإنها نقطة حدية لـ E ، طبعاً نحن نعلم أنها نقطة نهاية لـ E . كل جوار حول x يحوى نقاطاً من E والنقطة x من $C(E)$. إذاً x نقطة حدية لـ E . اجعل F إغلاق E واكتب $F = E \cup H$ حيث H مجموعة نقاط نهايات E . نقطة النهاية y للمجموعة F إما أن تكون نقطة نهاية لـ E أو لـ H (تمرين ٥-٢٣) في الحالة الأولى، $y \in F$. في الحالة الثانية نجد أن $y \in H$ ومنه أن $y \in F$ لأن H مغلقة (تمرين ٥-٢١).

(٢٦-٥) (أ) $[0, 1]$ ، (ب) $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ ، (ج) $[0, 1]$.

(٢٧-٥) من التمرين (٥-٢٥) نجد أن إغلاق الجوار N يساوى اتحاد N

وحدودها. الحدود هي مجموعة النقاط y بحيث $d(x, y) = r$.

هذا غير صحيح بشكل عام في الفضاءات المترية. فمثلاً خذ الفضاء

المكون من $[0, 1/2] \cup [1, \infty)$ بمسافة R_1 . اجعل N مجموعة النقاط التي

تبعد عن 0 بأقل من 1. إغلاق N هو المجموعة $[0, 1/2]$ وليس مجموعة

نقاط الفضاء التي لا يزيد بعدها عن 0 بأكثر من 1.

(٢٨-٥) افرض أن اتحاد n من المجموعات المغلقة يكون مغلقاً. لتكن

$F_1, F_2, \dots, F_n, F_{n+1}, \dots$ من المجموعات المغلقة. إذاً

$F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{n+1} = (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) \cup F_{n+1}$ اتحاد مجموعتين

مغلقتين بطريقة مماثلة (أو عن طريق المكملات) نثبت أن تقاطع عدد

منته من المجموعات المغلقة يكون مغلقاً.

(٢٩-٥) بالإمكان تعميم برهان أن تقاطع مجموعتين مغلقتين يكون مغلقاً.

(٣٠-٥) خذ مجموعات R_1 والتي يتكون كل منها من عدد نسبي واحد.

(٣١-٥) اتحاد المجموعات المفتوحة مفتوح: خذ نقطة x تنتمي إلى واحد من هذه

المجموعة المفتوحة على الأقل. إذن يوجد جوار لـ x ينتمي إلى أحد هذه

المجموعات المفتوحة (لأنها مفتوحة) وعليه فإن اتحاد المجموعات المفتوحة

يكون مفتوحاً.

التقاطع النهائي لمجموعات مفتوحة يكون مفتوحاً: يكفي أن نبرهن

ذلك لمجموعتين مفتوحتين (ثم نستعمل الاستقراء). لتكن G_1, G_2

مفتوحة $x \in G_1 \cap G_2$. يوجد جواراً حول x ينتمي إلى G_1 وجوار آخر

ينتمي إلى G_2 . تقاطع هذين الجوارين يحتوى جواراً أصغر وهذا بدوره

ينتمي إلى G_1 و G_2 وكذلك إلى تقاطعها.

تقاطع عدد لانهائي من المجموعات المفتوحة قد لا يكون مفتوحاً: خذ الفترات $(-1/n, 1/n)$ في R_1 . تقاطعها غير مفتوح لأنه مكون من النقطة 0.

(٣٢-٥) إذا وجدت نقاط حدية لـ N_2 فإنها تنتمي لمجموعة النقاط y حيث $d(x, y) \leq r/2$ وعليه فإن $N_2 \subset N_1$. إذا كان الفضاء مكوناً من الأعداد الصحيحة بمسافة R_1 و $r = 1$ فإن $N_1 = N_2$ إذا كانت $x = 0$.

(١-٦) أي جوار في Ω يتألف من نقطة واحدة إذا كان نصف قطره أقل من 1. إذاً مجموعات Ω والتي تحوى كل منها نقطة واحدة فقط ليست مغلقة.

(٢-٦) اغلاق المجموعات غير المغلقة يملأ جواراً ما. إذا كانت المجموعة مغلقة أيضاً فإنها تتطابق مع إغلاقها ولذا فلا بد أن تحوى جواراً ما.

(٣-٦) إذا اعتبرنا R_1 مجموعة جزئية من R_2 فإن المجموعة R_1 مغلقة وبما أن كل نقطة من R_1 هي نقطة نهاية لـ R_1 إذن R_1 تامة. ولكن R_1 لا تحوى أي جوار من R_2 .

(٤-٦) يمكن نشر أي عدد في مجموعة كانتور ماعدا الطرفين في النظام الثلاثي بدون الحاجة للرقم 1 وبدون أن ينتهى المفكوك بسلسلة من الأصفار أو بسلسلة من الأرقام 2. لنفرض أن أعداد مجموعة كانتور هذه هي p_1, p_2, \dots ونكون عدداً جديداً t خاناته في النظام الثلاثي t_n تساوى 0 أو 2 حسب ما إذا كانت الخانة النونية لـ p_n هي 2 أو 0. بما أن t تختلف عن p_n في الخانة النونية إذن فالعدد t لا يظهر في التعداد السابق. هذا الإنشاء لا يصح إذا كانت الخانة النونية في p_n صفراً دائماً (أو 2 دائماً) لإحدى قيم n والقيم التي تليها. بالإمكان تفادى هذه الصعوبات وذلك بإعادة ترقيم التعداد السابق قبل البدء في إنشاء العدد الجديد t .

(٥-٦) النقاط التي إحداثياتها نسبية تكون مجموعة قابلة للعد وكثيفة في كل مكان من R_2 .

(٦-٦) عدد كثيرات الحدود لا يقل عن عدد عواملها الثابتة.

(٧-٦) مجموعة الأعداد النسبية قابلة للعد، ومجموعة كثيرات الحدود الخطية بعوامل نسبية قابلة للعد كذلك وهكذا (راجع تمرين ٣-٣).

(٨-٦) إذا كانت P_n كثيرة حدود درجتها n فإننا نستطيع تقريب كل من عواملها بعدد نسبي إلى أقرب من $\epsilon/(n+1)$ ومن هذا نقرب كثيرة الحدود على $[0, 1]$ في حدود ϵ . (استعمل ٦-٧).

(٩-٦) المتتاليات المؤلفة من الرقمين $\{1, 0\}$ غير قابلة للعد. (نصف خانات المفكوك الثلاثي في التمرين ٦-٤).

(١٠-٦) 1.

(١١-٦) اجعل f_x الدالة المعرفة كالتالي $f_x(t) = 0$ حيث $0 \leq t < x$ و $f_x(t) = 1$ حيث $x \leq t \leq 1$. مجموعة الدوال هذه غير قابلة للعد لأنه يوجد دالة من هذا النوع لكل x في $[0, 1]$. المسافة بين أي من هذه الدوال تساوي 1. باقى البرهان مشابه للبرهان في حالة الفضاء m .

(١-٧) اجعل f دالة متصلة على مجموعة مغلقة ومحدودة E وافرض أن f غير محدودة. إذن يوجد نقطة x_1 بحيث $|f(x_1)| > 1$ ونقطة x_2 بحيث $|f(x_2)| > |f(x_1)| + 1 > 2$ وهكذا، بشكل عام $|f(x_n)| > n$. نظرية بولزانو - فيرشتراس تعطى نقطة نهاية x للمجموعة $\{x_1, x_2, \dots\}$ و

$x \in E$ لأن E مغلقة و $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ لأن f متصلة. ولكن $\lim f(x_n)$ غير موجود لأن $|f(x_n)| > n$.

(٧-٢) مجموعة E تقع في مستطيل ما أضلاعه توازي محاور الإحداثيات قسم المستطيل إلى أرباع بمستقيمتان تنصف كلًّا من أضلاعه واستمر في العملية كما في حالة R_1 .

(٧-٣) إذا كانت x تنتمي إلى ثلاث فترات على الأقل ولتكن E_1, E_2, \dots, E_k ، اختر الفترة التي طرفها الأيمن أكبر ما يمكن وكذلك الفترة التي طرفها الأيسر أصغر ما يمكن. بما أن كل من الفترتين تحوي x إذن فهي تتقاطع وتغطي باقي الفترات E_j ولذا نستغني عن هذه الفترات الأخيرة. نكرر العملية مع نقطة أخرى x لا تنتمي إلى المجموعتين المختارتين إن وجدت مثل هذه النقاط.

(٧-٤) لتكن $E \supset F$ حيث E متراسة و F مغلقة. ولتكن G مجموعة من المجموعات المفتوحة تغطي F . المكمل $C(F)$ مفتوحة و $\{G\}$ مع $C(F)$ تغطي E . حيث إن E متراسة، يوجد مجموعة جزئية منتهية من الفترات $\{G\}$ و $C(F)$ تغطي E وكذلك F . F تبقى مغطاة حتى بعد حذف $C(F)$.

(٧-٥) البرهان مثل ما في التمرين (٧-٢).

(٧-٦) المجموعة $\{1/2, 1/4, 1/8, \dots\}$ مغطاة بواسطة الفترات المفتوحة $\left(1 - \frac{1}{2^n}, 1 + \frac{1}{2^n}\right)$ ، لا يوجد عدد نهائي من هذه الفترات ويغطي E_1 لأنه في هذه الحالة يوجد أصغر طرف أيسر وهو موجب. يمكن تغطية المجموعة $E_2 = \{1, 2, 3, \dots\}$ بواسطة الفترات

$(1/2, 3/2)$ ، $(3/2, 5/2)$ ، أي عدد نهائي من هذه الفترات يغطي جزءاً محدوداً من R_1 و E_2 غير محدودة.

(٧-٧) إذا وجد غطاء نهائي لـ E ، اجعل y أصغر طرف أيسر. النقطة $y/2$ غير مغطاة. هذا لا يعارض نظرية هاين - بوريل لأن E غير مغلقة.

(٨-٧) المجموعة E مغلقة ولكنها غير محدودة.

(٩-٧ ، ١٠-٧) نظرية هاين - بوريل تعطينا شروطاً كافية لإمكانية الحصول على غطاء نهائي من أي غطاء ولكن هذه الشروط ليست لازمة.

(١-٨) لنفرض أن R_1 كامل وأن E مجموعة غير خالية محدودة من أعلى. افرض أن x_1 حد أعلى لـ E . إذا كان $x_1 - 1/2$ حداً أعلى لـ E كذلك فنسميه x_2 ; إذا كان $x_2 - 1/3$ حداً أعلى لـ E فنسميه x_3 وهلم جرا. بما أن E غير خالية والسلسلة $\sum 1/n$ متباعدة فإننا نصل في نهاية الأمر إلى n بحيث يكون $x_{n-1} - 1/n$ أول عدد من هذه الصورة وليس حداً علوياً لـ E . لدينا الآن فترة طولها $1/n$ طرفها الأيمن حد علوي لـ E وطرفها الأيسر ليس حداً علوياً. خذ الطرف الأيمن وسمه y_1 . نصف الفترة واجعل y_2 نقطة المنتصف إذا كانت حداً علوياً لـ E وإلا فاجعلها y_1 . كرر هذه العملية لتحصل على متتالية كوشي $\{y_n\}$ والتي تؤول إلى أصغر حد علوي للمجموعة E .

(٢-٨) مجموعة العناصر المختلفة من s_n لها أصغر حد علوي L . فإذا أعطينا $\epsilon > 0$ فإنه يوجد s_n بحيث $L - s_n < \epsilon$. وبما أن s_n تتزايد فإن $L - s_m < \epsilon$ لجميع $m \geq n$. إذن المتتالية $\{s_n\}$ تؤول إلى L .

(٣-٨) إذا كانت $\{(x_n, y_n)\}$ متتالية كوشيه في R_2 فإن $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليات كوشيه في R_1 .

(٤-٨) الأعداد النسبية في R_1 .

(٥-٨) إذا كانت $s_n \rightarrow L$ فإن كل s_n من نقطة معينة تنتمي إلى أي جوار معطى حول L . إذا لم تكن جميع s_n مساوية للنهاية L من نقطة معينة فإن كل جوار حول L يحوى واحداً من هذه العناصر يختلف عن L .

(٦-٨) إذا كانت $s_n \rightarrow L$ و $s_n \in F$ حيث F مجموعة مغلقة فإما $s_n = L$ من نقطة معينة وعليه فإن $L \in F$ أو أن L نقطه نهائية لمجموعة العناصر المختلفة من s_n وفي هذه الحالة نجد أن $L \in F$ لأن F مغلقة.

(٧-٨) يوجد أصغر حد علوي لـ E ونسميه L . يوجد نقاط x_n من E بحيث $L - x_n < \frac{1}{n}$ (قد لا تكون جميعها مختلفة). إذن L هي نهاية $\{x_n\}$. من التمرين (٦-٨) نستنتج أن $L \in E$.

(٨-٨) إذا كانت E مكونة من عدد نهائي من العناصر المختلفة فإن واحداً من هذه العناصر لابد أن يتكرر عدداً لا نهائياً من المرات وهذا يعطينا متتالية جزئية متقاربة. في الحالات الأخرى، يوجد نقطة نهاية لعناصر E ونستطيع تطبيق مبدأ المتتالية الجزئية.

(٩-٨) اجعل D ترمز للمسافة هنا. إذا لم تكن G محدودة فإننا نستبدل G بتقاطع G مع جوار كبير تبعد حدوده عن جميع نقاط F بمسافة أقل من D . إذا كانت المسافة D تؤخذ من قبل نقطة في G فإن النقطة في هذه المجموعة الجزئية من G أيضاً. إذن بإمكاننا افتراض أن F و G

مجموعات محدودة. خذ النقاط x_n في F و y_n في G بحيث $d(x_n, y_n) \rightarrow D$ استعمل التمرين (٧-٨)، خذ متتالية جزئية متقاربة من $\{x_n\}$ ومتتالية جزئية متقاربة من $\{y_n\}$ وسميهما أيضاً $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$. إذاً $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ حيث $x \in F$ و $y \in G$ فتكون F و G مغلقة. كذلك $d(x, y) \leq D$ ومنه نجد $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$. وبما أن $d(x, y)$ لا يقل عن D فإن $d(x, y) = D$.

(٨-١٠) (أ) نعم. (ب) ليس بالضرورة، مثلاً خذ الأعداد الصحيحة في R_1 بمسافة R_1 . جوار النقطة 0 بحيث $d(0, x) < 1/2$ يتألف من 0 وحدها ولذا فقطره صفر.

(٨-١١) لنفرض أن أقطار E وإغلاقها هي δ و Δ على الترتيب. طبعاً $\Delta \geq \delta$. خذ x_n و y_n في إغلاق E بحيث $d(x_n, y_n) \rightarrow \Delta$. إذا كانت x_n نقطة نهاية لـ E فإنه يوجد نقطة x'_n من E في حدود $1/n$ من x_n ، إذن $d(x'_n, y_n) \geq \Delta - 1/n$. بنفس الطريقة إذا كانت y_n نقطة نهاية لـ E . (في الحالات الأخرى نأخذ $x'_n = x_n$ و $y'_n = y_n$). بهذه الطريقة نحصل على النقاط x'_n و y'_n في E بحيث $d(x'_n, y'_n) \geq \Delta - 2/n$ ومن هذا نرى أن $\delta \geq \Delta$. إذن $\delta = \Delta$.

(٩-١) خذ المجموعة $\{x\}$ المكونة من العنصر الوحيد x . هذه المجموعة مغلقة إذا كان إغلاقها $\{x\}$ لا يحوى أي جوار، بمعنى آخر إذا كان $\{x\}$ ليس جواراً. هذا يحدث إذا كانت المجموعة من العناصر y بحيث $d(x, y) < r$ تحوى نقاطاً غير x لكل عدد موجب r وهذا ما يحدث فعلاً إذا كانت x نقطة نهاية في الفضاء.

(٢-٩) إذا اعتبرنا أي مجموعة غير خالية وتامة على أنها فضاء متري فإنها تكون من الفئة الثانية. حيث إن جميع نقاطها نقاط نهاية إذن فكل نقطة مغلخلة ولذا فأي مجموعة قابلة للعد فيها تكون من الفئة الأولى. إذن لا يوجد مجموعة غير خالية وتامة وقابلة للعد في R_1 .

(١-١٠) لتكن E مجموعة مغلقة ومكملتتها كثيفة في كل مكان. هذه المجموعة مغلخلة إلا إذا كان إغلاقها (داخل E) يحوى جواراً ما (تمرين ٦-٢). إذا احتوت E جواراً فإن مكملتتها تكون منفصلة عن هذا الجوار ولذا لا تكون كثيفة في كل مكان.

(٢-١٠) لنفرض أن فترة مغلقة في R_1 تساوى اتحاد مجموعة لانهاية قابلة للعد من المجموعات غير الخالية المغلقة المنفصلة E_n . بواسطة نظرية بير أحد هذه المجموعات كثيفة في فترة ما وبما أنها مغلقة فهي تحتوى هذه الفترة. خذ أكبر فترة من هذا النوع. كرر هذه العملية مع مايبقى من الفترة الأصلية. نحصل على مجموعة قابلة للعد من الفترات المغلقة I_n ينتمي كل منها إلى واحد من E_n ويكون اتحادها كثيفاً في كل مكان. إذا اشتركت I_n و I_m في نقطة فإن هذه النقطة تنتمي إلى E_n و E_m وهذا مستحيل لأن E_n مجموعات منفصلة. إذا أبعدنا النقاط الداخلية من جميع الفترات I_n فإن المجموعة المتبقية H تكون تامة. نطبق نظرية بير على H كما في المثال (ب) ونجد أن جزء المجموعة H المحتوى في فترة J ينتمي بكامله إلى إحدى E_n وكذلك جميع نقاط أطراف الفترات I_n والتي في الفترة J ولذا نجد أن هذه الفترات I_n جميعها تنتمي إلى الفترة E_n نفسها ولذا فإن H خالية.

(١-١١) يكفي أن نثبت أن مقياس $E \cap (a, b)$ يساوى صفراً لكل (a, b) لأنه بالإمكان تغطية R_1 بمجموعة قابلة للعد من هذه الفترات. غط E

بالفترات (a_n, b_n) والتي مجموع أطوالها لا يتعدى $q(b-a)$. ومن ثم غط كل $E \cap (a_n, b_n)$ بنفس الطريقة . إذن E مغطاه بفترات لا يزيد مجموع أطوالها الكلي عن

$$q(b_1 - a_1) + q(b_2 - a_2) + \dots = q[(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots] \leq q^2(b-a)$$

كرر العملية ولاحظ أن $q^n \rightarrow 0$.

(١٢-١) (د) نطاق الدالة هو النقطة 0 ، (ج) و (هـ) النطاق يساوى R_1 بكامله .

(١٢-٢) لتكن x العدد النسبي $\frac{p}{q}$. إذا كانت $q > m$ فإن $m!x$ عدد صحيح زوجي وتكون $\cos m! \pi x = 1$ ، النهاية الداخلية تساوى 1 ولذا فإن $f(x) = 1$. على العكس من ذلك ، خذ x غير نسبي . في هذه الحالة $m!x$ لا يكون عدداً صحيحاً أبداً و $|\cos m! \pi x| < 1$ والنهاية الداخلية تساوى 0 ومنه $f(x) = 0$.

(١٣-١) من المتراجحة المثلثية نجد أن

$$|f(x_0) - f(x)| = |d(x_0, y) - d(x, y)| \leq d(x_0, x)$$

(١٣-٢) يكفي أن نثبت أن $|D(x) - D(y)| \leq d(x, y)$.

لإثبات ذلك ، خذ أي نقطة P في E ، إذن $d(x, p) \leq d(x, y) + d(y, p)$ (المتراجحة المثلثية) . حيث إن $D(x) \leq d(x, p)$ مهما كانت P في E فإننا نجد أن $D(x) \leq d(x, y) + d(y, p)$. بالاختيار المناسب للنقطة P نستطيع جعل $d(y, p)$ قريب بصورة اختيارية من $D(y)$. إذاً

$D(x) \leq d(x, y) + D(y)$. إذا بدلنا x و y فإننا نجد أن
 $D(y) \leq d(x, y) + D(x)$ إذاً

$$D(x) - D(y) \leq d(x, y),$$

$$D(y) - D(x) \leq d(x, y).$$

وهذا يعني أن $|D(x) - D(y)| \leq d(x, y)$.

(١٣-٣) إذا كانت الدالة ثابتة فإن صورة كل مجموعة غير خالية هي نقطة واحدة .

(١٣-٤) الصورة العكسية لجوار حول $f(x_0)$ صغيرة لدرجة تكفى لإبعاد 0 عن كونه مجموعة مفتوحة . إذا كانت x في جوار x_0 ومحتواة في هذه المجموعة المفتوحة فإن القيم $f(x)$ تنتمي إلى الجوار الأصلي حول $f(x_0)$ وهذا يعني أن القيم $f(x)$ محدودة عن 0 .

(١٣-٥) مجموعة الأعداد الحقيقية التي قيمتها المطلقة أقل من $|f(x_0)| + 1$ تكون مفتوحة ولذا فصورتها العكسية مفتوحة . هذه الصورة العكسية غير خالية لأنها تحوى x_0 ولذا فهي تحوى جواراً حول x_0 كذلك .

(١٣-٦) نفي تعريف الاتصال يعني وجود $\epsilon > 0$ بحيث أنه لكل $\delta_n > 0$ يوجد x_n تحقق $|x_n - x_0| < \delta_n$ و $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon$ في نفس الوقت .

(١٤-١) إذا كانت $f + g$ و f دوال متصلة فإن $(f + g) - f = g$ دالة متصلة أيضاً . إذا كانت f غير متصلة فإن $-f$ غير متصلة أيضاً ولكن $f + (-f)$ هي الدالة الثابتة والتي قيمها تساوى 0 وهذه متصلة طبعاً .

(٢-١٤) المجموع: خذ أي ϵ نستطيع إيجاد δ_1 بحيث $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ عندما $d(x, x_0) < \delta_1$ و δ_2 بحيث $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ عندما $d(x, x_0) < \delta_2$. اجعل $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ ، إذاً $|f(x) + g(x) - [f(x_0) + g(x_0)]| < \epsilon$ عندما $d(x, x_0) < \delta$.

الضرب: الدوال f و g محدودة في جوار حول x_0 ، اجعل M الحد المشترك لقيم $|f(x)|$ و $|g(x)|$. إذاً

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| &\leq |[f(x) - f(x_0)]g(x)| + |f(x_0)[g(x) - g(x_0)]| \\ &\leq M|f(x) - f(x_0)| + M|g(x) - g(x_0)| \end{aligned}$$

والطرف الأيمن صغير إذا كانت $d(x, x_0)$ صغيرة.

القسمة: يكفي لإثبات أن $\frac{1}{g}$ متصلة عندما تكون g متصلة إذا كانت $g(x_0) \neq 0$ (باستعمال خاصية اتصال الضرب نجد أن $\frac{f}{g} = f \cdot (\frac{1}{g})$). من التمرين (١٣-٤)، نجد أن $|g(x)| \geq m > 0$ في جوار ما حول x_0 . لجميع قيم x في هذا الجوار نجد أن:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right| = \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)||g(x_0)|} \leq m^{-2}|g(x) - g(x_0)|$$

والطرف الأيمن صغير إذا كانت $d(x, x_0)$ صغيرة.

(٣-١٤) لتكن G مفتوحة إذن $C(G)$ مغلقة. فإذا كانت صور المجموعات المغلقة مغلقة فإن صورة $C(G)$ مغلقة. وبما أن f أحادية فإن مكمل صورة $C(G)$ هي صورة G وهذه المكمل مفتوحة (لأنها مكمل مجموعة مغلقة). نبرهن العكس بنفس الطريقة.

(١٤-٤) إذا كانت f لاتأخذ القيمة M فإن الدالة g المعرفة كالتالي $g(x) = 1/[M - f(x)]$ تكون متصلة على نطاق f . إذن g محدودة، واجعل G حداً أعلى لـ $|g(x)|$. إذاً $\frac{1}{M - f(x)} \leq G$. هذه المتراجحة تقتضي أن $f(x) \leq M - \frac{1}{G}$ وهذا يعني أن M ليست أصغر حد علوي لقيم f .

(١٤-٥) اجعل I و L أصغر وأكبر عددين في المدى. الدالة تأخذ هذه القيم بالطبع إذن فهي تأخذ كل قيمة في الفترة $[I, L]$ حسب خاصية القيمة المتوسطة للدوال المتصلة.

(١٤-٥ أ) إذا كانت $f(x) \equiv 0$ فلا يوجد شيء يبرهن. لنفرض أن $f(x_0) > 0$ لقيمة ما x_0 . نخذ $b > a$ بحيث تكون $f(x) < \frac{1}{2} f(x_0)$ لجميع $x \geq b$. إذن $\max f(x)$ على $[a, \infty)$ يساوي $\max f(x)$ على $[a, b]$.

(١٤-٥ ب) اجعل x_n أكبر قيمة تأخذ عندها f قيمتها العظمى على $[n, \infty)$ (هذه القيمة الكبرى موجودة لأن $f(x) \rightarrow 0$ والمجموعة حيث $f(x_n) = f(x)$ متراصة) إذن $x_{n+1} \geq x_n$ و $x_n \rightarrow \infty$.

(١٤-٦، ١٤-٧) مدى f هو نفسه مدى مقصور f على $[0, P]$. وهذه الدالة الأخيرة متصلة على مجموعة متراصة.

$$\begin{aligned} \int_x^{x+p} f(t) dt &= \int_0^P f(t) dt - \int_0^x f(t) dt + \int_P^{x+p} f(t) dt \\ &= \int_0^P f(t) dt - \int_0^x f(t) dt + \int_0^x f(t+p) dt \\ &= \int_0^P f(t) dt \end{aligned} \quad (١٤-٨)$$

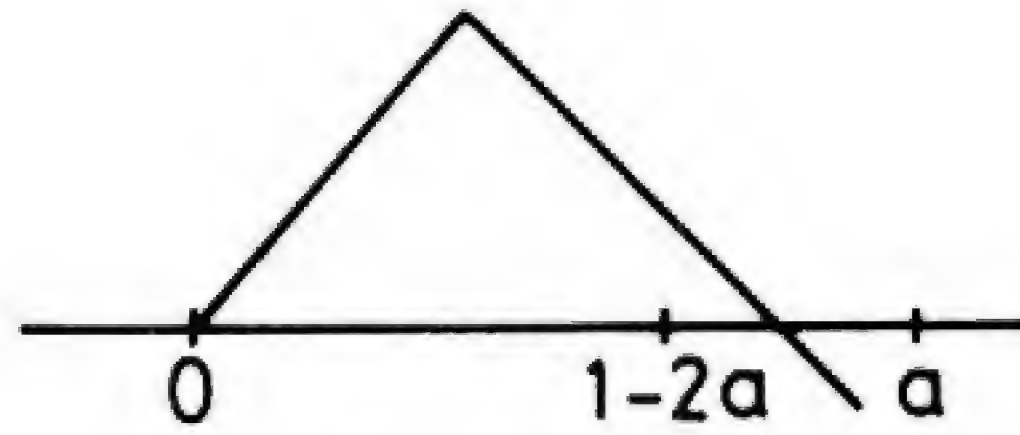
لأن $f(t + p) = f(t)$. وهذه طريقة أخرى بديلة

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x+p} f(t) dt = f(x + p) - f(x) = 0$$

(٩-١٤)

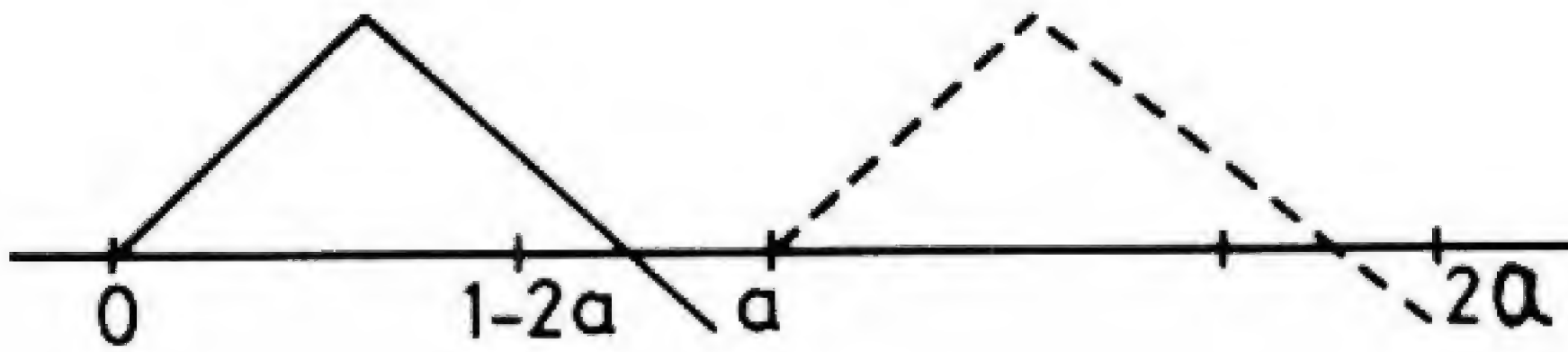
$$\int_0^p [f(x + a) - 2f(x) + f(x - a)] dx = 0$$

(١٠-١٤) نشير إلى خطوات طريقة البناء في حالة $1/3 < a < 1/2$. (كما في شكل ١١ أ) .



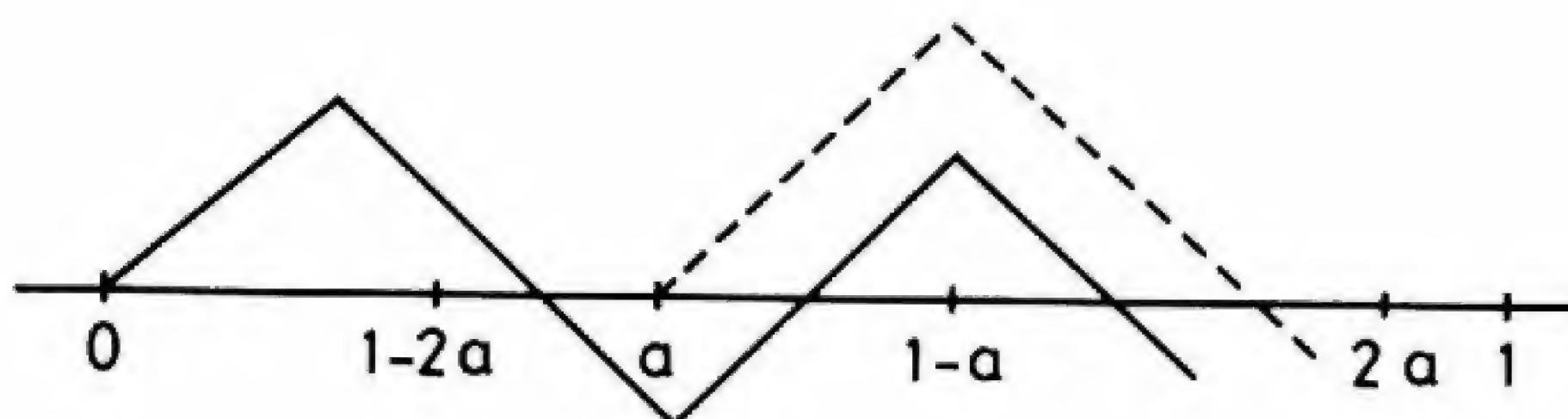
شكل (١١ أ)

من الواضح أنه ليس لهذا الجزء من المنحنى وتر أفقي بطول a .



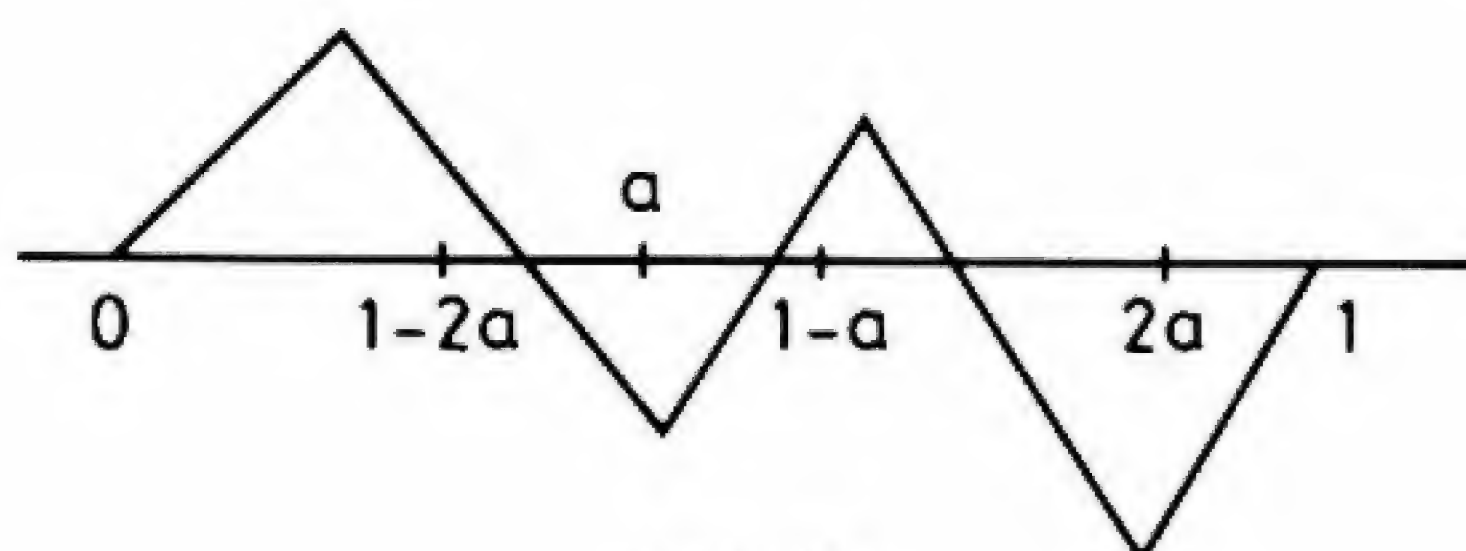
شكل (١١ ب)

الوتر الأفقي بطول a الذي طرفه الأيسر يقع على المنحنى المتصل يصل فقط إلى المنحنى المتقطع والذي هو عبارة عن إزاحة للمنحنى المتصل إلى اليمين a من الوحدات . بالتالي إذا وسعنا المنحنى المتصل بحيث يقع تحت المنحنى المتقطع فإنه لا يوجد وتر أفقي بطول a طرفه الأيمن عند أي نقطة إحداثيتها السيني لا يزيد عن $2a$. كما في شكل (١١ ب) .



شكل (١١ جـ)

بما أن $a > 1/3$ و $1 - a < 2a$ فإنه إذا وصلنا طرف المنحنى المتصل إلى 1 بحيث يكون تحت المحور السيني فإنه لا يوجد أي وتر أفقي بطول a . كما في شكل (١١ جـ).



شكل (١١ د)

كان مثال ليفي Levy هو الدالة $f(x) = \sin^2(\pi x/a) - x \sin^2(\pi/a)$ حيث $a \neq 1/n$. هالموس Halmos أشار إلى المؤلف أنه بطريقة مشابهة الدالة $f(x) = g(x) - x$ تعطي مثلاً آخر عندما تكون g مستمرة ودورية دورتها a . بحيث $g(0) = 0$ و $g(1) = 1$. (شكل ١١ د).

(١١-١٤) إذا كانت $a = 1/2$ فإن فرضيتنا تعني أن للدالة f وترافقياً بطول $1/2$. إذا كانت $a = 1/3$ فإن f لها وتر أفقي إما بطول $1/3$ أو بطول $1/2 \cdot 2/3 = 1/3$ ، وهكذا.

(١٢-١٤) لنعتبر الدالة g بحيث $g(x) = f(x) - x$ فنحصل على $g(0) = f(0) \geq 0$ و $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ وأن g مستمرة. لذا $g(x) = 0$ عند نقطة ما.

(١٤-١٣) هذه حالة نهائية للنظرية المتعلقة بتنصيف مساحتين أنيا (على افتراض أنها أثبتت للمساحات غير المحدبة). لإثبات ذلك مباشرة: خذ نقطة P على المنحنى وابحث عن نقطة أخرى Q بحيث يكون القوسان PQ متساويين. ليكن $f(P)$ الجزء من المساحة الذي بداخل المنحنى والواقع إلى يمين PQ فإن f دالة مستمرة نطاقها نقاط المنحنى وذلك لأن أي تغييراً طفيفاً في P ينتج عنه تغيير طفيف في Q . إذا بدأت P من P_0 وتبعت المنحنى فإن اليمين واليسار يكونان قد استبدلا بعضهما البعض عندما تصل P إلى Q_0 لذا فإن $f(P)$ إذا لم يكن أصلاً نصف المساحة فإنه الآن في نصف المساحة الآخر ولذا لا بد وأن يكون مساوياً لنصف المساحة عند موضع معين سابق للنقطة P .

(١٥-١) الأعداد L_n هي عناصر من متتالية غير تزايدية. بما أنها محدودة فإن لها نهاية L . إذا كانت n كبيرة لدرجة أن $L_n < L + \epsilon$ فإن $S_k < L + \epsilon$ لكل $k \geq n$. كذلك إذا كانت n كبيرة لدرجة أن $L_n > L - \epsilon$ فإنه توجد k ، $k > n$ بحيث $S_k > L - \epsilon$. بأخذ n بشكل تزايدى نحصل على عدد لانهائي من S_k بحيث تتحقق الخاصية الثانية. لذا فإن للنهائية L الخواص المعرفة للكمية $\limsup S_n$.

(١٥-٢) $l = \liminf S_n$ ، إذا كان ϵ أي عدد موجب معطى فإن $S_n \geq l - \epsilon$ إذا كانت n كبيرة بقدر كاف، بالإضافة إلى ذلك يوجد عدد لانهائي S_n يحقق $S_n \leq l + \epsilon$. إذا كانت $\{S_n\}$ غير محدودة من أسفل فإن $\liminf S_n = -\infty$ وإذا لم تكن l موجودة نكتب $\liminf S_n = +\infty$. في الأمثلة l تساوى (أ) -1 ، (ب) $+\infty$ ، (ج) $-\infty$ ، (د) 0 ، (هـ) 0 .

(١٥-٣) لدينا $S_n \leq \frac{1}{2}\epsilon + \limsup S_n$ عندما $n > n_1$ ، و $t_n \leq \frac{1}{2}\epsilon + \limsup t_n$ عندما $n > n_2$ ، بالتالي فإن $S_n + t_n \leq \epsilon + \limsup S_n + \limsup t_n$

عندما $n > \max(n_1, n_2)$ لذا $\limsup (S_n + t_n)$ لا يمكن أن يزيد عن $\limsup S_n + \limsup t_n$. إذا كان $\lim t_n = T$ نحصل على $t_n \geq T - \frac{1}{2} \epsilon$ لعدد لا نهائي من الأعداد n و $S_n \geq \limsup S_n - \frac{1}{2} \epsilon$ لكل عدد كبير n لذا $S_n + t_n \geq \limsup S_n + T - \epsilon$ لعدد لا نهائي من n .

(١٥-٤) إذا كان $\epsilon > 0$ نحصل على $S_n \leq l + \epsilon$ عندما $n > n_1$ وعلى $S_n \geq L - \epsilon$ عندما $n > n_2$ لذا فإن $|S_n - L| < \epsilon$ عندما $n > \max(n_1, n_2)$.

(١٦-١ أ) $S_n \rightarrow 0$ في C لأنه إذا كان ϵ عدداً حقيقياً موجباً فإن $|S_n(x)| < \epsilon$ إذا كان $1 - \epsilon < x \leq 1$ مستقلاً عن n لأنه $|x^n| \leq 1$. إذا $0 \leq x \leq 1 - \epsilon$ نحصل على $|S_n(x)| \leq (1 - \epsilon)^n$. لذا $\max_{0 \leq x \leq 1} |S_n(x)| \leq (1 - \epsilon)^n$ لا يزيد عن أكبر العددين ϵ و $(1 - \epsilon)^n$ ولكن العدد الأخير هو الأصغر إذا كانت n كبيرة بقدر كاف.

(١٦-١ ب) $\{S_n\}$ غير متقاربة في C لأنه $S_n(x) \rightarrow 0$ لكل x لكن $S_n(1 - \frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow \frac{1}{e}$ و $\max |S_n(x)|$ لا ينقص عن $S_n(1 - \frac{1}{n})$.

(١٦-٢) $\sup_{x \in E} |S_n(x)| \leq M$ عن طريق التقارب المحدود ولذا $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \leq M$ ، $x \in E$.

(١٧-١) السلسلة لا تتغير عند مفاضلتها حدّاً حدّاً لذا مجموعها $S(x)$ يحقق $S'(x) = S(x)$ وبالتالي $S(x) = Ce^x$ حيث $C = f(0) + f'(0) + \dots$.

(١٧-١ أ) بتطبيق اختبار فيرشتراس (صفحة ٨٩) حيث E مجموعة الأعداد الصحيحة فإن المتتالية، التي حدها الذي رتبته K يساوي $\sum_{n=1}^{p(k)} f_n(k)$ ، تكون متقاربة بانتظام. هذا يقتضي أن

$$\left| \sum_{n=1}^{p(k)} f_n(k) - \sum_{n=1}^{p(k)} L_n \right| \leq \left| \sum_{n=1}^N [f_n(k) - L_n] \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{p(k)} f_n(k) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{p(k)} L_n \right|$$

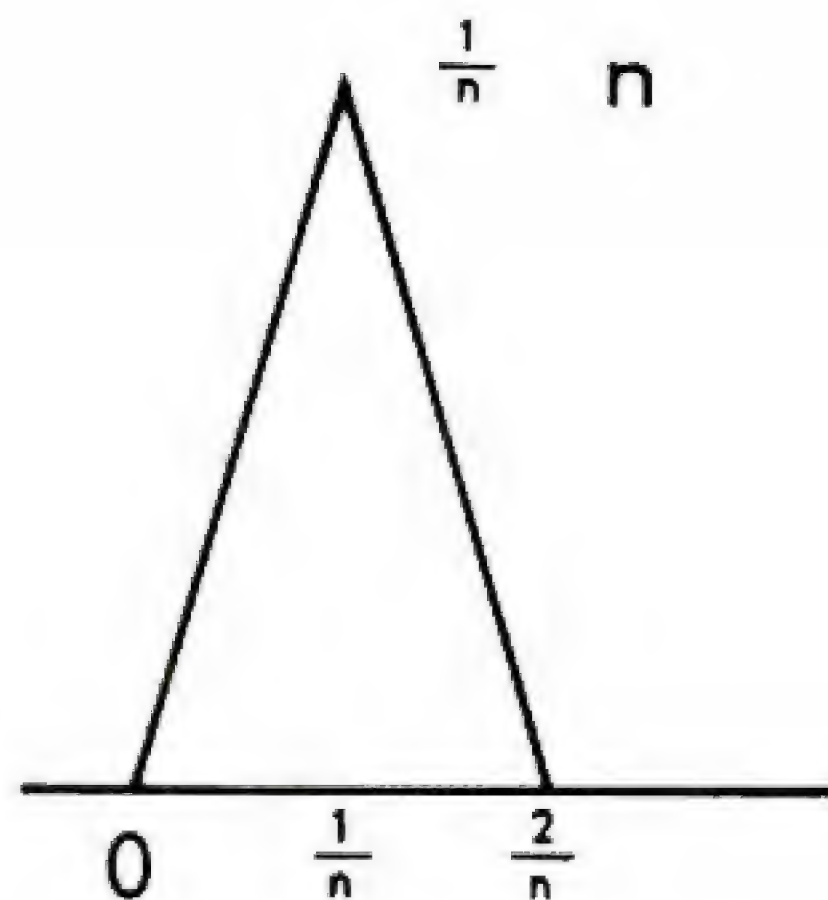
بالإمكان جعل كل من المجموعتين الأخيرين أقل من ϵ بأخذ N كبيرة (وذلك عن طريق استخدام التقارب المنتظم). ثبت N ودع $k \rightarrow \infty$ في المجموع النهائي.

$$(1 + x/k)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} \left(\frac{x}{k}\right)^n \quad (١٧-١ ب) \text{ لكل } x,$$

$$= \sum_{n=0}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{2}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right) \frac{x^n}{n!}$$

$$M_n = |X|^n/n!$$

(١٧-٢) على سبيل المثال، $f_n(x) = 0$ فيما عدا $0 < x < 2/n$ و $f(1/n) = n$ و $f(x)$ خطية في $(0, 1/n)$ وفي $(1/n, 2/n)$. (كما في شكل ١٢).



شكل (١٢)

(١-١٨) على سبيل المثال، $f(x, y) = \sin 2\theta$ حيث $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$.

(١-٢٠) بما أن $\int_R^{x+y+R} = \int_R^{R+y} + \int_{R+y}^{x+y+R}$ نحصل على $\phi(x+y) = \phi(y) + \phi(x)$.
لكن ϕ هي نهاية دوال مستمرة لذا فهي على الصيغة $\phi(x) = ax$.

(١-٢١) إذا كان $f'_+(x)$ موجوداً (محدوداً) فإن $\lim_{h \rightarrow 0+} [f(x+h) - f(x)]/h$ محدود، لذا $\lim_{h \rightarrow 0+} [f(x+h) - f(x)] = 0$. بالنسبة للجملة المتضمنة f' احذف جميع الرموز السفلية والعلوية وكذلك إشارة $+$ في الجملة السابقة أعلاه.

(٢-٢١) إذا كان $f(x) = 0$ لكل $x < 0$ وإذا كان $f(x) = 1$ لكل $x > 0$ و $f(0) = 1/2$ نحصل على $f'(0) = +\infty$.

$$(٣-٢١) \quad \epsilon(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a) - f'(a) \rightarrow 0$$

(٤-٢١) الكمية $g(x+h) - g(x)$ ربما تكون صفراً لبعض قيم h القريبة بشكل اختياري من الصفر. من تمرين (٣-٢١) نحصل على:

$$\begin{aligned} \phi(x+h) - \phi(x) &= f(g(x+h)) - f(g(x)) \\ &= [g(x+h) - g(x)][f'(g(x)) + \epsilon(g(x))] \end{aligned}$$

بما أن $g'(b)$ موجود فإن g دالة مستمرة عند b ، بالتالي $g(x) \rightarrow g(b)$ عندما $x \rightarrow a$ و $\epsilon(g(x)) \rightarrow 0$. اقسم على h ودع $h \rightarrow 0$.

(٥-٢١) إذا كان $f_+(x) > 0$ فإن $\liminf_{h \rightarrow 0+} [f(x+h) - f(x)]/h = \delta > 0$ ، لذا لكل الأعداد الموجبة الصغيرة بقدر كاف $\delta/2$ $f(x+h) - f(x) \geq \delta/2 h$.

(٦-٢١) لكل $h > 0$ نحصل على $f(x+h) - f(x) \leq 0$ ولذا $f^+(x) \leq 0$ ، لكل $h < 0$ نحصل على $f(x+h) - f(x) \leq 0$ و $[f(x+h) - f(x)]/h \geq 0$ ولذا $f_-(x) \geq 0$.

(٧-٢١) افرض أن $f'(a) < y < f'(b)$ وطبق الجملة المذكورة في التمرين على الدالة g المعرفة بـ $g(x) = f(x) - yx$.

(٨-٢١) لتكن $g(x) = f(x+a) - f(x) - af'(x)$ ولتكن C نقطة حيث f تحصل على قيمتها العظمى . إذاً $f'(c) = 0$ ولذا $g(c) = f(c+a) - f(c)$. بما أن $f(c+a)$ لا يزيد عن $f(c)$ (القيمة العظمى لـ f) فلا بد وأن يكون $g(c) \leq 0$. لتكن d نقطة حيث f تحصل على قيمتها الصغرى ، فإنه بنفس الطريقة تحصل على $g(d) \geq 0$. بما أن g هي مشتقة (لأن الدالة المستمرة f هي تفاضل تكاملها) فإن g لها خاصية القيمة الوسطى ولذا $g(x) = 0$ عند نقطة ما x .

(٩-٢١) ليكن $0 < x < 1$ فإن $g(x) = \int_{f(x)}^{f(1)} h(t)dt$ غير محدود عندما $x \rightarrow 0+$ لأن $f(0+) = 0$. نظرية القيمة المتوسطة تقتضي

$$g(1) - g(x) = (1-x)g'(c) = - (1-x)hf(c)f'(c), 0 < x < c$$

والطرف الأيسر غير محدود عندما $x \rightarrow 0+$. هذا الإثبات يتطلب فرضيات أقل من الإثبات الذي يعتمد على تبديل المتغير :

$$\int_0^1 hf(x)f'(x)dx = \int_0^{f(1)} h(t)dt = +\infty$$

المكامل إشارته ثابتة ولذا يكون غير محدود .

(١٠-٢١) $f(x) = 1$ لكل $x < 0$ و $f(x) = 0$ لكل $x \geq 0$.

(٢١-١١) نفترض ضمناً أن $f'(x)$ موجود لجميع قيم x في جوار للنقطة $y (x \neq y)$. نظرية القيمة المتوسطة تؤدي إلى $[f(x) - f(y)]/(x - y) = f'(t)$ حيث t بين x و y ، الطرف الأيمن قريب بالدرجة التي نرغبها من $\lim_{x \rightarrow y} f'(x)$ إذا كانت x قريبة بقدر كاف من y ، ولذا كذلك الطرف الأيسر. الجملة الأخيرة تعني أن $f'(y)$ موجود ويساوي $\lim_{x \rightarrow y} f'(x)$.

(٢٢-١) لتكن الفترة هي $[a, b]$: لذا $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ عندما $a \leq x \leq b$.

(٢٢-٢) لتكن y نقطة داخلية في النطاق ولتكن $\{x_n\}$ متتالية تزايدية نهايتها y ، فإن $\{f(x_n)\}$ متتالية تزايدية محدودة لها نهاية L (انظر تمرين ٨-٢). إذا كانت $x_n < x < y$ نستطيع أن نجد x_m بحيث $x < x_m < y$ وبالتالي $f(x_n) \leq f(x) \leq f(x_m) \leq L$ بما أن $f(x_n) \rightarrow L$ فإن $f(x) \rightarrow L$.

(٢٢-٣) إذا كان $f_n(x) \rightarrow f(x)$ لكل x و $f_n(x) \leq f_n(y)$ عندما $x \leq y$ فإن $f(x) \leq f(y)$ عندما $x \leq y$. الجملة لا تستثني احتمال كون بعض الدوال f_n تزايدية والبعض الآخر تناقصية. إذا كانت هذه هي الحالة فإن عدداً نهائياً من الدوال f_n المتميزة لن يسبب أي عائق. إذا وجد عدد لانهائي من النوعين فإن f لابد وأن تكون غير تناقصية وأيضاً غير تزايدية وبالتالي تصبح ثابتة.

(٢٢-٤) لتكن للدالة f قفزات بمقدار $1/n(n+1)$ عند النقاط $1/n$ و $f(0) = 0$. إذا كان $m^{-1} < h < (m+1)^{-1}$ فإن $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{m+1}$ وبالتالي $f'_+(0) = 1$.

